Beniamino Segre


## Sulle corrispondenze (2,2) cicliche


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **9** (1930), n.1, p. 1–3.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

# PICCOLE NOTE

## Sulle corrispondenze (2, 2) cicliche.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

**Sunto.** - *In questa Nota vengon* caratterizzate *le corrispondenze* (2, 2) *involutorie su d'una retta, le cui coppie di punti omologhi son neutre rispetto ad una* $g_3^1$, *mediante l'annullarsi d'un invariante proiettivo; poscia, premesse alcune considerazioni generali sulla determinazione degli invarianti di una corrispondenza* (2, 2) *involutoria, vien fatto cenno di alcune applicazioni alla teoria delle quartiche piane.*

**1.** Avendo su d'una retta $r$ una $g_3^1$, si definisce su $r$ una corrispondenza (2, 2) dicendo omologhi due punti quando appartengono ad uno stesso gruppo della $g_3^1$; una siffatta corrispondenza verrà brevemente denominata una corrispondenza (2, 2) *ciclica.* Vedremo che le corrispondenze (2, 2) cicliche posson venir *caratterizzate* fra le corrispondenze (2, 2) involutorie, mediante l'annullarsi di un certo invariante proiettivo, e precisamente che:

*Data su d'una retta* r *una corrispondenza* (2, 2) *involutoria, di equazione*

$$(1)\quad a\cdot(xy)^2 + b\cdot xy(x+y) + c\cdot(x+y)^2 + d\cdot xy + e\cdot(x+y) + f = 0,$$

*se vi sono su* r *tre punti distinti a due a due omologhi, vi son di conseguenza infinite terne analoghe, costituenti una* $g_3^1$, *e la corrispondenza* (2, 2) *è ciclica; condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò accada, è che si annulli l'invariante quadratico:*

$$(2)\qquad af - be + c^2 + cd.$$

Ad un punto di $r$ avente una data coordinata $x$, corrispondono, in virtù della (1), due punti, le cui coordinate $y_1$ ed $y_2$ son le radici dell'equazione:

$$y^2(ax^2+bx+c) + y[bx^2+(2c+d)x+e] + (cx^2+ex+f) = 0,$$

ond'è:

$$y_1y_2 : y_1+y_2 : 1 = (cx^2+ex+f) : -[bx^2+(2c+d)x+e] : (ax^2+bx+c).$$

lasciano inalterata sia la superficie $\Phi$, sia il doppio sistema coniugato su di essa.

Se si operano effettivamente queste sostituzioni si trova che sono invarianti per esse le *forme associate* alla (1)

$$hdudv \quad \text{e} \quad kdudv \tag{3}$$

ove

$$h = a_u + ab - c, \quad k = b_v + ab - c: \tag{4}$$

cioè che indicate con apici le quantità relative alla (1') trasformata della (1) si ha

$$hdudv = h'du'dv', \quad kdudv = k'du'dv'.$$

E viceversa, soddisfatte le (5), le (1) e (1') cui si riferiscono sono equivalenti, cioè si può sempre determinare una trasformazione (2) che faccia passare dall'una all'altra.

Tutto ciò è notissimo e dà all'interpretazione proiettiva indicata ragion d'essere: della sua opportunità fanno fede i numerosi risultati, anche puramente analitici, ottenuti con questa interpretazione.

Ma con ciò non è esaurita, a mio modo di vedere, l'interpretazione geometrica della (1): cioè non è stabilita l'equivalenza fra la (1) ed il modello geometrico scelto. Questo dipende infatti da una scelta arbitraria di un *gruppo di soluzioni* della (1) e i risultati che si ottengono operando su di esso porteranno in generale traccia del gruppo inizialmente scelto: solo quando questa traccia non esiste il risultato potrà enunciarsi relativamente alla (1) (e cioè ai suoi coefficienti) e non sarà relativo al gruppo di soluzioni considerato. In altri termini: due superficie $\Phi$ e $\Phi'$ trasformate proiettive una dell'altra soddisfano sostanzialmente alla stessa equazione (1) [cioè a meno eventualmente di una sostituzione (2)]; ma viceversa due superficie $\Phi$ e $\Phi'$ soddisfacenti alla stessa equazione [o a due equivalenti] non sono affatto, in generale, proiettivamente identiche. Occorre quindi rendersi conto delle relazioni geometriche intercedenti fra due siffatti modelli. Da questa domanda ha avuto origine la presente Nota. Si troverà che, oltre le (3), la (1) possiede un *invariante integrale* esteso ad un circuito (chiuso) della superficie; e nasce allora il problema di caratterizzare le coppie di superficie, su cui si corrispondano i sistemi coniugati, soddisfacenti ad (o integrali di) equazioni del tipo (1) con gli stessi invarianti integrali (estesi a circuiti omologhi).

Più in generale due tali equazioni o superficie hanno un invariante integrale che si determina come invariante assoluto di una determinati tutti gli invarianti proiettivi d'una corrispondenza (2, 2) involutoria su d'una retta [1]. — Tali invarianti ricevono un utile impiego nello studio di un sistema, $\Sigma$, algebrico, $\infty^1$ e d'indice 2, di coniche di un piano $\pi$. Basta invero pensare che le coppie di punti segate dalle varie coniche di $\Sigma$ su d'una retta generica di $\pi$, determinano su questa una corrispondenza (2, 2) involutoria; si può quindi considerare la curva inviluppata dalle rette di $\pi$ per le quali la relativa corrispondenza (2, 2) ha nullo un invariante proiettivo; ed è chiaro che *tale curva è legata invariantivamente al sistema* $\Sigma$, ed alla quartica piana che ne è l'inviluppo.

Di tutto ciò verrà detto più diffusamente in un prossimo lavoro, in cui — fra l'altro — saranno indicate varie nuove proposizioni sulle quartiche piane.

*Roma, 19 novembre 1929.*

(1) Basta ricondursi nel modo detto agli invarianti simultanei di due coniche, il cui sistema completo trovasi p. es. alle pag. 288-302 delle *Vorlesungen über Geometrie* di A. CLEBSCH - F. LINDEMANN (Leipzig, Teubner, 1876), vol. I.