BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO CELLITTI

Sopra una rappresentazione della sostituzione lineare, binaria, unimodulare a coefficienti interi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **9** (1930), n.1, p. 13-20.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_13_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_13_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

Sopra una rappresentazione della sostituzione lineare, binaria, unimodulare a coefficienti interi.

Nota di CARLO CELLITTI (a Viterbo).

Sunto. - Con la presente Nota l'A. trova il modo di esprimere ogni sostituzione lineare, binaria, unimodulare a coefficienti interi mediante il prodotto di due sostituzioni, la prima delle quali ha il secondo coefficiente multiplo di un numero assegnato p .

Nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » (Settembre 1914), ho dimostrato che posto

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove D è un numero intero qualunque, ogni sostituzione lineare, binaria, primitiva di modulo D

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

può sempre esprimersi mediante la formula

$$S = H^\mu \cdot K^\nu \cdot H^\xi \cdot K^\omega \dots N \cdot K^\rho \cdot H^\sigma$$

ove $\mu, \nu, \xi, \omega, \dots, \rho, \sigma$ sono numeri interi positivi o negativi; il prodotto che precede N è un prodotto di un numero finito di potenze di H e di K alternate; quello che segue N è un prodotto di due sole potenze, una di K , l'altra di H .

Ritornando sullo stesso ordine di idee, vogliamo ora dimostrare che se

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

è una sostituzione lineare, binaria, unimodulare a coefficienti interi, è sempre possibile di determinarne un'altra T , col secondo coefficiente multiplo di un qualsiasi numero p , tale che la sostituzione U sia esprimibile mediante il prodotto della sostituzione T per una delle $p + 1$ sostituzioni:

$$Q_x = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ove x è uno dei valori della serie completa di resti (mod. p):

$$0, 1, 2, \dots, p-1.$$

Ed infatti, supposto di aver determinato la T conforme all'enunciato del problema, dobbiamo avere l'una o l'altra delle due eguaglianze:

$$U = T \cdot Q_x$$

$$U = T \cdot P.$$

Dalle quali ricaviamo rispettivamente:

$$(I) \quad \begin{aligned} T &= UQ_x^{-1} \\ T &= UP^{-1}. \end{aligned}$$

Rimane, ora, a stabilire quando la sostituzione T è espressa dall'una piuttosto che dall'altra delle eguaglianze (I) e a far vedere che nel caso in cui è espressa dalla prima, ciò avviene per un sol valore di x convenientemente scelto nella serie completa di resti (mod. p):

$$0, 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

A tal uopo, effettuando il prodotto UQ_x^{-1} avremo:

$$T = U \cdot Q_x^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha x + \beta \\ \gamma & \gamma x + \delta \end{pmatrix}.$$

E poichè al secondo coefficiente abbiamo imposto la condizione di essere multiplo di p , il valore di x deve soddisfare la congruenza:

$$\alpha x + \beta \equiv 0, \quad (\text{mod. } p).$$

Distinguiamo, ora, due casi secondoche è

$$\alpha \equiv \not\equiv 0, \quad (\text{mod. } p), \quad \text{oppure} \quad \alpha \equiv 0, \quad (\text{mod. } p).$$

Supposto

$$\alpha \equiv \not\equiv 0, \quad (\text{mod. } p),$$

la congruenza scritta ammette sempre una sola soluzione nel sistema completo di resti (mod. p):

$$0, 1, 2, \dots, p-1,$$

e la sostituzione T è, quindi, determinata.

Se, invece, è

$$\alpha \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

dovrà simultaneamente aversi

$$\beta \equiv \not\equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

perchè, essendo per le ipotesi fatte, la sostituzione U unimodulare, deve essere

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

Se $g(z)$ è una trascendente intera di genere zero, che soddisfa alla condizione B , la serie (4) ha raggio di convergenza 1.

6. La condizione B contiene la condizione apparentemente meno restrittiva

$$\frac{1-\varepsilon}{z_{r_i+1}} > n_i > \frac{1+\varepsilon}{z_{r_i}}$$

condizione che contiene la disuguaglianza

$$(5) \quad \frac{1}{z_{r_i+1}} > (1+\gamma) \frac{1}{z_{r_i}}$$

dove $\gamma = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$, e può essere piccolo quanto si vuole, purchè ε sia sufficientemente piccolo.

La (5) sarebbe la condizione che io avrei suggerito al MINETTI per segnargli una via facile nelle sue ricerche (1), ma la redazione della nota sua alla quale mi riferisco, e che fu pubblicata nel 1926, non è stata vista da me che in questi ultimi giorni, malgrado che in essa si parli di un *accurato esame* da parte mia.

7. Diremo che la $g(z)$ soddisfa alla condizione C quando esiste un numero reale $\gamma > 0$ a cui corrisponda una successione (ω) per cui valgano le (5).

Io dico che se la $g(z)$ soddisfa la condizione C , soddisfa anche la condizione B .

Infatti, se si pone

$$\varepsilon = \gamma : (1 + \gamma),$$

si ha

$$1 + \gamma = (1 + 3\varepsilon) : (1 - \varepsilon),$$

e la (5) dà

$$(1 - \varepsilon)z_{r_i} > (1 + 3\varepsilon)z_{r_i+1}.$$

Ma si può trovare, un i_0 per cui per ogni $i > i_0$ sia $z_{r_i} < \varepsilon$ e per tali i si ha

$$(1 - \varepsilon)z_{r_i} > (1 + \varepsilon + z_{r_i} + z_{r_i+1})z_{r_i+1},$$

ossia

$$z_{r_i} + z_{r_i+1} > (2 + z_{r_i} + z_{r_i+1})z_{r_i+1} + \varepsilon(z_{r_i} + z_{r_i+1})$$

(1) S. MINETTI, *Sul raggio di convergenza degli sviluppi Tayloriani* $\sum a_n z^n$ ove $a_n = g(n)$ per n intero positivo con $g(z)$ trascendente intera. [Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1926, serie 6, vol. 11, fasc. 12, pp. 723-731].

soggetta ad oscillazioni forzate. Precisamente, se nel dispositivo del pendolo di AIRY, nel punto di unione dei tre fili, poniamo una seconda massa, per la massa primitiva si ottengono oscillazioni forzate e soltanto per quanto riguarda quelle nella direzione delle oscillazioni della massa aggiunta, restando imperturbate le oscillazioni nella direzione a questa ortogonale.

Perciò dal confronto della linea tracciata dalla primitiva massa nel dispositivo così modificato, con quella del pendolo di AIRY, che si ottiene sopprimendo la massa aggiunta, si avrà una rappresentazione dello scostamento delle oscillazioni forzate.

Per giustificare quanto abbiamo affermato, premettiamo brevemente la teoria delle piccole oscillazioni del doppio pendolo conico, per avere, come casi particolari, il pendolo di AIRY e il pendolo di AIRY modificato con l'aggiunta della seconda massa, come fu detto sopra.

1. Consideriamo il bipendolo conico costituito dalla massa M sospesa in O con un filo di lunghezza L e dalla massa m appesa alla massa precedente con un filo di lunghezza l . I fili di sospensione sono flessibili ed inestendibili e di massa trascurabile. Riferiamoci agli assi cartesiani con l'origine in O e costituiti dall'asse verticale Oz diretto verso il basso e dagli assi Ox , Oy posti nel piano orizzontale per O . Diciamo X , Y , Z le coordinate della massa M e x , y , z quelle della massa m .

La configurazione d'equilibrio stabile si ha per $Z=L$, $z=L+l$, $X=Y=x=y=0$.

L'energia cinetica del sistema durante le piccole oscillazioni intorno alla configurazione precedente, con la solita approssimazione ⁽¹⁾ è:

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} M(X'^2 + Y'^2) + \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2),$$

ed il potenziale, sviluppato in serie di MAC-LAURIN, trascurati che siano i termini di grado superiore al secondo, in X , Y , x , y , diviene

$$(2) \quad U = (M+m)gl + mgl - g \frac{M+m}{2L} (X^2 + Y^2) - \frac{mg}{2l} (x^2 + X^2 + y^2 + Y^2) + \frac{mg}{l} (xX + yY).$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*. Vol. II, parte I, pag. 188.

Le equazioni di LAGRANGE, ove si ponga

$$3) \quad \frac{m}{M} = \varepsilon,$$

acquistano la forma:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' = -g \left[\frac{1}{L} (1 + \varepsilon) + \frac{1}{l} \varepsilon \right] X + \frac{g}{l} \cdot \varepsilon \cdot x \\ Y'' = -g \left[\frac{1}{L} (1 + \varepsilon) + \frac{1}{l} \varepsilon \right] Y + \frac{g}{l} \cdot \varepsilon \cdot y \\ x'' = -\frac{g}{l} x + \frac{g}{l} X \\ y'' = -\frac{g}{l} y + \frac{g}{l} Y. \end{array} \right.$$

Cioè, in prima approssimazione, le piccole oscillazioni del bi-
pendolo conico intorno alla configurazione d'equilibrio dipendono
soltanto dal rapporto delle due masse.

2. Se supponiamo il rapporto ε assai piccolo ed l molto grande,
trascurando le quantità piccole del terzo ordine, le (4) diventano

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' = -\frac{g}{L} (1 + \varepsilon) X \\ Y'' = -\frac{g}{L} (1 + \varepsilon) Y \\ x'' = -\frac{g}{l} x + \frac{g}{l} Y \\ y'' = -\frac{g}{l} y + \frac{g}{l} X. \end{array} \right.$$

Ossia, il moto della massa M , rimane periodico ellittico come se non
ci fosse la massa m (4) col periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g(1 + \varepsilon)}},$$

lievemente minore di quello che sarebbe se non ci fosse il secondo
pendolo m , (moto lievemente più frequente).

Rimane più sensibilmente perturbato invece il moto della
massa m e per questo, tutto accade come se m fosse attratta verso

(4) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit., pag. 190.

la sua posizione d'equilibrio da una forza proporzionale alla distanza e nel contempo soggetta ad una forza diretta parallelamente e proporzionale alla forza che si può, come è noto, pensare che attragga M .

Il moto di m non è quindi un moto centrale.

3. Se inizialmente la massa M viene posta sul piano yz , alla distanza a da Oz , e viene spinta verso il suo centro di oscillazione con la velocità v_0 , ossia se per $t=0$ poniamo

$$Y' = -v_0, \quad X' = 0, \quad X = 0, \quad Y = a,$$

la seconda delle (5) dà, integrando,

$$(6) \quad Y = r \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{g(1+\varepsilon)}{L}} t + \alpha \right)$$

con r ed α costanti d'integrazione dipendenti da a e da v_0 .

La prima delle (5) integrata una volta diviene

$$X'^2 = -\frac{g(1+\varepsilon)}{2L} X^2,$$

la quale permette di affermare che l'unica soluzione reale dell'equazione è la costante

$$X = 0.$$

Ossia, con le condizioni iniziali poste, od altre per le quali sia $X' = 0$, $X = 0$, la massa M oscilla esclusivamente nel piano verticale yz , come un pendolo semplice di lunghezza $L_1 = \frac{L}{1+\varepsilon}$, ossia M è un pendolo semplice un po' più frequente di quello che sarebbe se non ci fosse il secondo pendolo m .

Le altre due equazioni (5), diventano

$$x'' = -\frac{g}{l} x$$

$$y'' = -\frac{g}{l} y + \frac{g}{l} Y$$

con Y dato dalla (6).

Ossia: il moto della massa m , per effetto delle oscillazioni di M rimane perturbato soltanto per quanto riguarda il ~~movimento~~ componente nella direzione y , mentre nessuna perturbazione risulterà dal moto componente nella direzione x .

Inoltre: *il moto della massa m nella direzione y rientra in quei moti chiamati oscillatori forzati con forza addizionale sinusoidale* (1).

4. Il moto particolare considerato al n.° precedente può venire realizzato praticamente, senza riguardo ai valori delle masse ed alla lunghezza dei pendoli, con un dispositivo ispirantesi al ben noto pendolo di AIRY; basta collegare la prima massa M per mezzo di due fili ad una sbarra orizzontale obbligandola così ad oscillare nel piano verticale normale alla sbarra stessa.

Nel pendolo di AIRY la prima massa M è nulla ed il dispositivo viene usato come apparecchio dimostrativo per le curve del LISSAJOUS, quando si dà alla massa m un piccolo movimento qualunque intorno alla sua posizione di equilibrio. Assumendo come asse x la sbarra d'attacco dei due fili, posto che siano fissati in due punti simmetrici rispetto all'origine O , dalle (5) facendo $X=0$ costantemente, e nello stesso tempo facendo tendere $\varepsilon \rightarrow \infty$, si ricavano le equazioni delle piccole oscillazioni del pendolo di AIRY:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{g}{L} Y - \frac{g}{l} Y + \frac{g}{l} y \\ y'' = -\frac{g}{l} x \\ x'' = -\frac{g}{l} y + \frac{g}{l} Y \end{array} \right.$$

che, essendo per la prima

$$Y = y \frac{L}{l+L},$$

per quanto riguarda il moto di m si riducono a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = -\frac{g}{l} x \\ y'' = -\frac{g}{l_1} y \end{array} \right. \quad l_1 = L + l$$

ossia, *il moto di m viene ad essere come il risultante di due moti oscillatori ortogonali liberi; quello nella direzione dell'asse x di lunghezza l , l'altro, nella direzione dell'asse y, di lunghezza $l_1 = L + l$, data dalla distanza di m dalla sbarra di sospensione.*

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit., pag. 73 e seguenti.

Se nel punto M di concorso dei tre fili, poniamo una massa M , in modo da far diventare il dispositivo un doppio pendolo, essa perturba, come vedemmo, soltanto il moto componente nella direzione y della massa m che diventano oscillazioni forzate, e le linee descritte da questa massa non rientrano più nella categoria di quelle del LISSAJOUS.

Pertanto dal confronto dei due grafici, si mette in evidenza lo scostamento delle oscillazioni forzate di m nella direzione x .