Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Supino

Di alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche e le loro derivate, e delle loro applicazioni alla meccanica dei sistemi continui

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.5, p. 253–260.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_253_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

Di alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche e le loro derivate, e delle loro applicazioni alla meccanica dei sistemi continui.

Nota di GIULIO SUPINO (a Bologna).

Sunto. - *La presente nota riassume una comunicazione dell'A. alla XVIII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (Firenze, settembre 1929) e riflette la ricerca di espressioni, di carattere funzionale, atte a limitare in un punto interno del campo le funzioni armoniche (assegnate per mezzo dei valori assunti sul contorno) e le loro derivate. Le espressioni ottenute implicano corrispondenti limitazioni per le derivate prima e seconda della funzione di* GREEN *e si applicano con successo alla risoluzione approssimata di alcuni problemi fisici (idromeccanica piana, propagazione del calore, elasticità).*

1. Lo studio di espressioni, di carattere funzionale, atte a limitare in un punto interno del campo le funzioni armoniche (determinate dai valori assunti sul contorno) e le loro derivate, costituisce un problema che credo nuovo e che si è presentato a me come ricerca preliminare, necessaria, per la dimostrazione di un noto principio della tecnica. Infatti nelle applicazioni della teoria matematica della elasticità, si fa uso frequente della proposizione che segue, nota col nome di *principio* o *postulato* del DE SAINT-VENANT:

« *Se un solido elastico è in equilibrio sotto l'azione di forze esterne superficiali agenti soltanto su una piccola zona, allora le tensioni interne tendono rapidamente a zero quando ci si allontani dalla zona stessa* ».

Come si vede questa proposizione ha il titolo di postulato soltanto perchè finora non si è riusciti a dimostrarla; ma poichè le equazioni generali della elasticità determinano in modo unico la soluzione quando siano assegnate le forze esterne, il *principio*, se vero, deve risultare una conseguenza di quelle equazioni. Ora di questa proposizione (che per le applicazioni ha indubbio valore tanto che il BOUSSINESQ prima (1885) e il WOLF poi (1914) ne hanno date per casi diversi particolari verifiche ([1])) non si conosce ancora alcuna dimostrazione generale; la quale, dato che le componenti di tensione si possono ottenere con combinazioni opportune di funzioni armoniche (CERRUTI, BURGATTI ([2])) o risolvendo equazioni integrali che contengano nel nucleo la derivata seconda della funzione di GREEN ([3]), sembra richiedere, come ricerca preliminare, uno studio sulle funzioni armoniche: dovremo cioè in primo luogo rispondere alla questione: *in che modo si comportano le funzioni armoniche quando sono diverse da zero soltanto su una piccola zona* σ_1 *del contorno* s *del campo e sono uguali a zero nella rimanente zona* (σ_2)?

Non si introduce alcuna restrizione supponendo che la funzione armonica data U sia uguale in σ_1 alla costante M: allora se,

([1]) Cfr. BOUSSINESQ, *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris, 1885; K. WOLF, *Zur Gultigkeit des Saint-Venantschen Prinzips bei der Balkenproblemen*. « Sitzungsberichten der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem. Naturw. Klasse ». Bd. CXXIII (1914). Si veda anche G. SUPINO, *Una verifica del postulato del Saint-Venant per gli archi*. « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. LX (1925).

([2]) Il teorema del CERRUTI è riportato senza dimostrazione dal MARCOLONGO, *Teoria Matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Milano, 1904; per la dimostrazione v. BURGATTI, *Sopra due utili forme dell'integrale generale dell'equazione per l'equilibrio dei solidi elastici isotropi*. Memorie della « R. Accademia delle Scienze di Bologna », tomo III della serie 8ª, pag. 63 (1925-26).

([3]) Un procedimento di questo genere si ricava, per i sistemi piani, in base ad una nota di LAURICELLA (« Atti dei Lincei », 1911) e seguendo un'idea del LICHTENSTEIN, *Ueber die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie*. « Math. Zeitsch. », 1924.

per fissare le idee, ci poniamo in due dimensioni e consideriamo un campo circolare, risulta immediata la posizione:

$$U_A = \frac{M}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma_1 - \alpha$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_A = \frac{M}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\cos(n,x) - 2\cos\varphi\cos(r,x)}{r} d\sigma_1$$

nella quale A indica un punto generico del campo, P un punto di σ_1; n è la normale a σ_1 in P diretta verso σ_2; $r = \overline{PA}$, $\varphi = \widehat{nr}$ ed α è l'angolo secondo cui da un punto qualunque del cerchio si vede σ_1.

Si presentano quindi spontanee le limitazioni

(1) $$U_A \leq \frac{M}{\pi} \omega_A$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_A \leq \frac{M}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{r^2} \text{ [1]}$$

(ω_A angolo visuale secondo cui da A si vede σ_1).

Queste formule, per quanto semplici, sono sufficienti per il problema posto; ma esse hanno interesse soltanto se sia possibile estenderle ad ogni campo (o trovare delle limitazioni analoghe valide in generale). Ho studiato questo problema in più lavori, alcuni dei quali già pubblicati [2] e l'ho risolto per il caso dei campi convessi.

La ricerca è semplice per le limitazioni relative alle funzioni. Consideriamo, per esempio, un campo C, a due dimensioni, semplicemente connesso e convesso; basterà allora ricordare che se in un punto A, interno a C è

$$W_A = \int_S \mu(P) \frac{\cos\varphi}{PA} dS$$

[1] Questa limitazione perde di significato quando ci si avvicini a σ_1; ma si deve ricordare che, in base al problema fisico posto, a noi interessano soltanto i punti *lontani* da σ_1.

[2] Cfr. SUPINO, *Alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche*, « Atti della R. Accademia dei Lincei », 2° sem. 1928; *Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica*, Ibid., 2° sem. 1928. Nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » sarà pubblicata una Memoria più diffusa sull'argomento: *Sopra alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche e le loro derivate*.

quando A tende ad un punto P' del contorno, W_A tende a

$$W_{P'} = \pi\mu(P') + \int_S \mu(P) \frac{\cos\varphi}{\overline{PP'}} dS.$$

Se poniamo

$$W_A = \frac{M}{2\pi - \gamma} \int_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma_1$$

(γ rappresenta l'angolo visuale *massimo* secondo cui da un punto variabile di σ_1 si vede σ_2) verificheremo subito in base alle formule precedenti che su σ_1 è $W_{P'} \geq M$ e su σ_2 è $W_{P'} > 0$: seguono così le diseguaglianze

$$U_A \leq \frac{M}{2\pi - \gamma} \int_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma_1 = \frac{M}{2\pi - \gamma} \omega_A < \frac{M}{2\pi - \gamma} \frac{\sigma_1}{R}. \tag{2}$$

Quando σ_1 tende a zero γ (che per $\sigma_1 \neq 0$ è $\leq \pi$) tende a π. Allora la (2) coincide con la (1).

Si osservi come confrontando la (1) con la relazione

$$U_A = \frac{M}{2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\partial G_P^A}{\partial n_P} d\sigma_1$$

nella quale $\frac{\partial G_P^A}{\partial n_P}$ è la derivata normale in P della funzione di Green relativa al punto P del contorno e al punto A interno al campo, e passando al limite per σ_1 tendente a zero si deduce la diseguaglianza

$$\left|\frac{\partial G_P^A}{\partial n_P}\right| \leq \frac{2\cos(n, r)}{r}$$

risultato che si collega con note ricerche di P. Lévy (« Acta Math. » 1919) e E. E. Levi (« Gott. Nachricht. » 1908).

2. La ricerca diviene meno semplice quando si voglia ottenere una limitazione per le derivate della funzione armonica data. Ne indicherò soltanto il procedimento generale.

Si considerino dapprima i punti di σ_2; sia A uno di questi e sia t la tangente a σ_2 in A; indichiamo poi con p la retta congiungente gli estremi P_1, P_2 di σ_1. Se p non è parallela a t (questo caso particolare rimane poi incluso con un ovvio passaggio al limite) si fissi l'attenzione sul campo angolare che contiene σ_2

ed è limitato dalle due semirette appartenenti a p e a t e uscenti dalla comune intersezione. La funzione W, regolare in questo campo, uguale ad M in P_1P_2, nulla nella rimanente parte di p e su t, ha in comune con la U quella parte C' del campo C limitata da σ_2 e da P_1P_2.

Quando il campo sia convesso è sempre sul contorno (e quindi in C') $U \leq W$: in particolare in A è $U_A = W_A$. Ne segue che

$$\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_A \geq \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_A .$$

Ora nel campo angolare così definito si riesce ad ottenere una limitazione per la derivata normale $\frac{\partial W}{\partial n}$ qualunque sia il valore dell'angolo $\widehat{pt}$, questa limitazione sarà dunque valida per la derivata normale sul contorno di qualunque campo convesso. E poichè possiamo anche dimostrare che la funzione armonica U nulla in σ_2 e uguale ad M in P_1P_2 ha le linee di livello tutte convesse, così la formula ottenuta servirà a limitare la derivata della U in ogni punto interno, per ogni direzione.

La formula cui si giunge è

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_A \leq \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1}{r^2} ;$$

da esse segue

$$\left|\frac{\partial^2 G_P^A}{\partial x_A \partial n_P}\right| \leq \frac{\pi^2}{2r^2} .$$

Le ricerche precedenti si possono estendere allo spazio: si trovano allora le limitazioni [1]:

$$U_A \leq \frac{M}{2\pi}\int_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{r}\, d\sigma_1 , \qquad \frac{\partial G_P^A}{\partial n_P} \leq \frac{2\cos\varphi}{r^2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_A \leq \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1}{r^3} , \qquad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial n_P \partial x_A}\right| \leq \frac{\pi^2}{r^3} .$$

3. Si è accennato all'inizio della nostra comunicazione al problema di elasticità che ci ha condotto a questa ricerca. Ma le formule ottenute possono essere applicate anche ad altri problemi che indicheremo brevemente.

[1] La dimostrazione di queste formule si trova nella Memoria del « Circolo Matematico di Palermo ».

Consideriamo prima la teoria della propagazione del calore. Dato un solido convesso supponiamo divisa in due zone complementari (σ_1 e σ_2) la sua superficie limite; se T_1 è la temperatura costante in σ_1, T_0 quella di σ_2 ($T_1 > T_0$) possiamo affermare, in base a cose note:

1) che in un punto A distante r da σ_1 la temperatura T non può superare il valore

$$T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2\pi}\omega_1 . \quad \left[\omega_1 = \int_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma_1 < \frac{\sigma_1}{r^2}\right];$$

2) che la quantità di calore ΔQ che nell'intervallo di tempo Δt passa attraverso la superficie piana $\Delta\omega$ (per A) vale al più

$$\frac{\pi C}{4}\frac{(T_1 - T_0)}{r^3}\Delta t\, \Delta\omega \text{ (1)}.$$

Vediamo ora un'applicazione alla idrodinamica piana dei liquidi perfetti. È necessario perciò conoscere una limitazione valida per il problema di NEUMANN. Nei campi piani (convessi) questa può essere ottenuta facilmente dalla limitazione data per il problema di DIRICHLET, ricordando che assegnare $\frac{\partial U}{\partial n}$ su s equivale ad assegnare $\frac{\partial V}{\partial s}$ (se V è la funzione armonica coniugata ad U). Si trova così la formula (2):

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_A \leq \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1^2}{r^2},$$

valida per la derivata (secondo la direzione x arbitraria) della funzione U, la cui derivata normale è nulla in σ_2 ed assume in σ_1 il massimo valore assoluto M.

Indichiamo ora con $u(t; x, y)$, $v(t; x, y)$ le componenti della velocità in un punto generico del piano x, y e in un determinato istante t (si pensa ad un sistema cartesiano $(0; x, y)$ di riferimento). Se il liquido è incompressibile, qualunque sia il valore di $p(t; x, y)$

(1) Indico con C il coefficiente di conducibilità, cioè la quantità di calore che nell'unità di tempo passa attraverso una superficie unitaria di parete quando due pareti parallele a distanza unitaria sono mantenute a temperatura costante diversa dall'una all'altra dell'unità di temperatura.

(2) Vedi la 2ª delle mie Note alla « R. Accademia dei Lincei ».

(pressione unitaria) e delle forze di massa si può porre come è noto

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

[ψ funzione di corrente].

Se il moto è irrotazionale è $\Delta_2\psi = 0$ comunque varii il moto stesso col tempo.

Supponiamo ora che il campo di moto del liquido sia limitato da una parete *fissa* convessa: parete che chiude il campo stesso salvo che nelle zone $a, b, c, \ldots$: indicando con $V(t)$ la velocità massima in queste zone al tempo t con σ_1 il tratto compreso tra gli estremi delle zone più lontane si osserva subito che se il moto è irrotazionale comunque variino la pressione, le forze di massa e la velocità stessa nel recipiente, sempre è in un punto A interno a C:

$$V_A(t) = \sqrt{u^2 + v^2} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 V(t) \frac{\sigma_1^2}{r^2}.$$

Il caso qui considerato ha riscontro fisico in quello di un recipiente cilindrico nel quale venga immessa acqua per un'apertura a e tolta con una seconda apertura b: e potrebbe applicare anche allo studio della velocità dell'acqua in un'insenatura per effetto di correnti provenienti dal largo.

4. Prima di terminare questa comunicazione accennerò brevemente allo ~~stato delle~~ mie ricerche di elasticità. Nel lavoro del LICHTENSTEIN già ricordato (v. nota a pag. 254), gli spostamenti, dati in superficie, sono determinati in tutto il solido, con la risoluzione di una equazione integrale relativa alla dilatazione cubica: essi vengono allora presentati per mezzo di integrali che contengono oltre agli spostamenti in superficie e alla dilatazione cubica trovata, la derivata prima o la seconda della funzione di GREEN. Ora con opportuni accorgimenti si può trovare un valore maggiorante per la dilatazione cubica: ne segue quindi il teorema:

« Se in un solido elastico, privo di forze di massa, gli spostamenti, dati sulla sua superficie limite, sono diversi da zero soltanto in una zona superficiale σ_1, allora le caratteristiche di sollecitazione diminuiscono di intensità all'allontanarsi da σ_1 e in un punto fissato tendono ad un limite determinato e finito (generalmente diverso da zero) quando σ_1 tende a zero ».

Per i sistemi elastici piani vale la proposizione simmetrica:

« Se in un corpo elastico in due dimensioni le forze sono applicate soltanto nella zona σ_1 del suo contorno allora le caratteristiche della sollecitazione diminuiscono di intensità all'allontanarsi da σ_1 e in un punto fissato tendono a zero insieme con σ_1 stessa ».

Questo secondo teorema costituisce per i sistemi piani, la dimostrazione del principio di SAINT-VENANT. Sono evidenti le piccole modificazioni relativamente all'enunciato, riportato all'inizio di questa comunicazione, e generalmente ammesso.