
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PACIFICO MAZZONI

Alcune applicazioni dei polinomi di Tchebychev

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 8 (1929), n.5, p. 246-248.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_246_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_246_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_246_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alcune applicazioni dei polinomi di Tchebychev.

Nota di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

Sunto. - Si considerano alcune questioni di minimo che si risolvono mediante applicazione dei polinomi di TCHEBYCHEV, e si assegna un limite superiore per la migliore approssimazione di una data funzione in un intervallo.

In questa nota consideriamo alcune questioni di minimo che si risolvono mediante applicazione dei polinomi di TCHEBYCHEV.

1. Data una funzione reale $f(x)$, continua in un intervallo qualunque $a - h$, $a + h$, e considerato un sistema di $n + 2$ numeri crescenti $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, scelti fra $a - h$ ed $a + h$, è noto che il polinomio di TCHEBYCHEV di grado n di approssimazione minima sul detto sistema di punti dà la seguente approssimazione φ_1 :

$$(1) \quad \varphi_1 = \frac{\left| \frac{f(x_0)}{\omega_0} - \frac{f(x_1)}{\omega_1} + \frac{f(x_2)}{\omega_2} - \dots \pm \frac{f(x_{n+1})}{\omega_{n+1}} \right|}{\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}}},$$

avendo indicato con ω_k l'espressione:

$$(2) \quad \omega_k = |(x_0 - x_k)(x_1 - x_k) \dots (x_{k-1} - x_k)(x_{k+1} - x_k) \dots (x_{n+1} - x_k)| \quad (1).$$

Il numeratore della (1) non è altro che la funzione interpolare $|f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})|$, che notoriamente è $= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$, essendo ξ un certo valore intermedio fra x_0 e x_{n+1} ; talchè la (1) si può scrivere:

$$(3) \quad \varphi_1 = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)! \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}} \right)} \quad (2).$$

(1) Vedasi DE LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, Gauthier-Villars Ed., 1919), n. 59, pag. 81.

(2) Vedasi anche il mio lavoro: *Sui polinomi di approssimazione minima* (« Rendiconti del Circolo Matematico », Palermo, 1929), n. 3. Per le funzioni interpolari vedasi A. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica* (Pellerano succ., Napoli 1909), pag. 274 e 508.

Ora supponiamo che la funzione da approssimare sia $f(x) = x^{n+1}$; allora si ha $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, e la (3) diventa in tal caso:

$$(4) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}}}.$$

Se gli $n+2$ punti $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sono scelti in modo che l'espressione (4) abbia il massimo valore possibile, allora, com'è noto, si ha la migliore approssimazione ε su *tutto* l'intervallo $a-h, a+h$; e allora il denominatore $\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \dots$ sarà minimo. Ma è noto che il polinomio $P(x)$ di grado n di approssimazione minima per la funzione $f(x) = x^{n+1}$ (sull'intervallo $a-h, a+h$) è il seguente:

$$(5) \quad P(x) = x^{n+1} - \frac{h^{n+1}}{2^n} \cos(n+1) \arccos \frac{x-a}{h},$$

che la migliore approssimazione è $\varepsilon = \frac{h^{n+1}}{2^n}$, e che gli $n+2$ punti sui quali viene raggiunta tale approssimazione ε sono i seguenti:

$$(6) \quad x_k = a - h \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (\text{per } k = 0, 1, 2, \dots, n+1) \quad (1).$$

Dalla (4) si deduce dunque la prima proposizione:

Il minimo valore della quantità

$$(7) \quad \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \dots + \frac{1}{\omega_{n+1}},$$

in cui ω_k è dato dalla (2), e i valori $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sono punti dell'intervallo $a-h, a+h$, è la quantità $\frac{2^n}{h^{n+1}}$, e viene raggiunto quando i numeri x_k sono dati dalla (6).

2. Ora se determiniamo il polinomio $Q(x)$ di grado $n+1$ che assume i valori ± 1 sugli $n+2$ punti $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$, con alternanza di segno, abbiamo, a causa della (2), che la quantità (7) è

(1) Vedasi S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales ecc.* (Gauthier-Villars éd.; Paris, 1926), n. 3, pag. 6. È noto che si ha:

$$\cos(n+1) \arccos z = \frac{1}{2} \cdot (z + \sqrt{z^2 - 1})^{n+1} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{n+1}.$$

proprio la funzione interpolare, $|Q(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})|$ ⁽¹⁾. Ma si ha:

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{Q^{(n+1)}}{(n+1)!},$$

che è uguale al coefficiente b_0 di x^{n+1} nell'espressione di $Q(x)$; dunque la quantità (7) è $= b_0$, e per la (4) si ha: $b_0 = \frac{1}{\rho_1}$. Ora è minimo b_0 quando è massimo ρ_1 , e ciò accade quando i numeri x_k sono dati dalla (6), e allora si ha $\rho = h^{n+1} \cdot 2^n$. Abbiamo così la seconda proposizione:

Fra tutti i polinomi di grado $n+1$ che assumono i valori ± 1 , con alternanza di segno, in $n+2$ punti (in ordine crescente) $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ dell'intervallo $a-h, a+h$, quello che ha il minimo coefficiente b_0 di x^{n+1} si ottiene quando i punti $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sono dati dalla (6); il minimo valore di b_0 è $\frac{2^n}{h^{n+1}}$, e il polinomio che realizza tale minimo è il seguente:

$$Q(x) = \cos(n+1) \arccos \frac{x-a}{h}$$

(infatti esso assume i valori ± 1 nei detti punti, ed è l'unico di grado $n+1$).

3. Deduciamo infine una notevole conseguenza dalla (3). Siccome il minimo della quantità (7) è $2^n \cdot h^{n+1}$, risulta dalla (3) in generale:

$$(8) \quad \rho_1 < \frac{|f^{(n+1)}(\xi)| h^{n+1}}{(n+1)! 2^n}.$$

Dunque: Se una qualunque funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $a-h, a+h$ ammette la derivata $(n+1)^{\text{ma}}$ inferiore numericamente a un numero M , allora la migliore approssimazione di $f(x)$ su un sistema di $n+2$ punti, oppure su tutto l'intervallo $a-h, a+h$, è certamente inferiore alla quantità

$$(9) \quad \frac{M h^{n+1}}{(n+1)! 2^n} \quad (2).$$

Bari, ottobre 1929 (VII).

(1) Vi sono due tali polinomi $Q(x)$, e si ottengono l'uno dall'altro con un semplice cambiamento di segno. Ma fissato che debba essere, ad esempio, $Q(x_0) = +1$, allora $Q(x)$ è unico.

(2) Nell'Opera citata del BERNSTEIN (a pag. 10) è indicato un limite superiore per ρ_1 , che è doppio della quantità (9).