
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO LABOCCETTA

Le funzioni puntiformi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 8 (1929), n.5, p. 235-241.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_235_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_235_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

Le funzioni puntiformi.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Sunto. - *Proseguendo i precedenti studi sulla rappresentazione analitica di porzioni di spazio comunque limitate, si considera il caso limite delle funzioni che rappresentano punti e si mostra come, partendo dalla funzione di una variabile che rappresenta un punto, si possano costruire le funzioni che, in uno spazio ad una o più dimensioni rappresentano più punti o un insieme numerabile di punti nei quali la funzione prende valori assegnati, indicando qualche applicazione.*

Chiamo « *puntiforme* » una funzione $F(x_1, x_2 \dots x_n)$ che ha dappertutto il valore zero eccetto che per un certo sistema $a_1, a_2 \dots a_n$ di valori delle variabili in corrispondenza del quale assume un valore non nullo k .

Attribuendo a queste variabili il significato di coordinate, si può dire che la funzione puntiforme, come ora definita, rappresenta un punto P di uno spazio ad n dimensioni perchè scrivendo

$$(1) \quad F(x_1, x_2 \dots x_n) = k$$

si ha un'equazione soddisfatta solo per il sistema di valori $a_1, a_2 \dots a_n$ delle variabili al quale corrisponde un punto di tale spazio.

Se poi questo punto è proprio l'origine delle coordinate, cioè le variabili hanno tutte il valore zero, e inoltre il valore che la funzione prende in esso è $+1$ dirò che questa è la funzione puntiforme « *fondamentale* » dello spazio S_n considerato. Ma dicendo « *la funzione puntiforme fondamentale* » senz'altro intenderò quella funzione $F(x)$ di una sola variabile che prende il valore $+1$ per $x=0$ e che è zero per ogni altro valore di x .

Seguendo le notazioni adoperate nei precedenti miei scritti questa funzione può essere brevemente indicata col simbolo $\varphi_0(0, 1, 0)$.

Da essa si deducono agevolmente tutte le altre funzioni puntiformi, tanto quelle fondamentali di più variabili, quanto quelle che, in un S_n qualsiasi, rappresentano più punti i quali possono essere sia in numero finito, sia costituire un insieme infinito ma effettivamente numerabile.

Se, infatti, si sa costruire la funzione puntiforme fondamentale $F_0(x)$ di una variabile, è chiaro che si otterrà la funzione puntiforme di n variabili $x_1, \dots, x_n$ scrivendo

$$(2) \quad F_0(x_1)F_0(x_2) \dots F_0(x_n)$$

$$(3) \quad \left[\frac{F_0(x_1) + F_0(x_2) + \dots + F_0(x_n)}{n} \right]$$

(dove I_x indica al solito la funzione « *intero di x* » di LEGENDRE) poichè entrambe queste funzioni hanno il valore $+1$ nell'origine ed il valore zero in ogni altro punto.

D'altra parte volendo passare dalla funzione fondamentale, che scriverò brevemente $F_0(x_n)$ invece di $F_0(x_1 \dots x_n)$, ad una funzione puntiforme generica che prende il valore k nel punto $P \equiv a_1 \dots a_n$, basta scrivere

$$(4) \quad kF_0(x_n - a_n).$$

Ciò posto, la funzione più generale, che rappresenta m punti $P_1, \dots, P_m$ di coordinate $a_{1,i}, \dots, a_{n,i}$ ($i=1, \dots, m$) nei quali essa prende i valori $k_1, \dots, k_n$, è esprimibile sotto forma di somma o di prodotto delle funzioni rappresentanti ciascuno dei punti

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m k_i F_0(x_n - a_{n,i})$$

$$(6) \quad -1 + \prod_{i=1}^m (k_i + 1)^{F_0(x_n - a_{n,i})}.$$

Entrambe queste espressioni sono casi particolari di due espressioni più generali indicate in un mio precedente scritto ⁽¹⁾ sulla rappresentazione analitica di diagrammi costituiti da una successione di archi di linee diverse. Si tratta sempre di una particolare forma di interpolazione che ho proposto ⁽²⁾ di chiamare « *interpolazione segmentale* ». L'analogia della formula alla quale ero giunto

$$(7) \quad y = F_1(x)\varphi_1(0, 1, 0) + \dots + F_i(x)\varphi_i(0, 1, 0) + \dots + F_n(x)\varphi_n(0, 1, 0)$$

con quella d'interpolazione « *puntuale* » di LAGRANGE è evidente. Qui rileverò soltanto che la (7) è nella forma, identica anche alla formula di « *interpolazione funzionale* »

$$(8) \quad \Gamma = \beta_1\Gamma_1 + \beta_2\Gamma_2 + \dots + \beta_n\Gamma_n$$

data dal prof. S. PINCHERLE ⁽³⁾.

Infine se i punti non sono in numero finito ma costituiscono un insieme effettivamente numerabile le coordinate di ciascuno di essi essendo funzioni $\psi_i(m)$, $i = 1, \dots, n$, dell'indice m , mentre i valori della funzione che ad essi corrispondono sono pur essi funzioni $K(m)$ dell'indice o funzioni $K(x_1, \dots, x_n)$ delle coordinate, allora il polinomio (4) diventa una serie il cui termine generale ha una delle due forme

$$(9) \quad K(m)F_0(x_1 - \psi_1(m), \dots, x_n - \psi_n(m))$$

$$(10) \quad K(x_1, \dots, x_n)F_0(x_1 - \psi_1(m), \dots, x_n - \psi_n(m))$$

dove m può prendere tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$.

In quanto segue mi propongo di far vedere in qual modo si possano effettivamente costruire le funzioni puntiformi fondamentali e quelle che da esse si deducono coi metodi sopra indicati.

1. Funzioni che rappresentano un punto. — Ricordando che la funzione $\operatorname{sgn} x$ è zero per $x = 0$ ed ha il valore $+1$ per $x > 0$ e -1 per $x < 0$ si scorge subito che

$$(11) \quad F_0(x) = 1 - \operatorname{sgn}^2 x$$

(1) « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », 18 giugno 1922.

(2) In una mia comunicazione al Congresso dei Matematici di Bologna *Sulla estensione dei metodi della geometria analitica alla rappresentazione dello spazio fisico*, che verrà pubblicata negli Atti.

(3) V. p. 243 e 299 di S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*. N. Zanichelli, Bologna, 1901.

è proprio la funzione puntiforme fondamentale poichè appunto $\operatorname{sgn}^2 x$ è zero per $x=0$ ed ha sempre il valore $+1$ per $x \neq 0$. Si noti che nel mentre la funzione $\operatorname{sgn} x$ è esprimibile con un integrale definito, la funzione $\operatorname{sgn}^2 x$ è esprimibile anche con una serie essendo ⁽¹⁾

$$(12) \quad \operatorname{sgn}^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n.$$

In via generale può servire a costruire una funzione puntiforme fondamentale qualsiasi funzione $F(x)$ che è sempre > 0 per $-\infty < x < +\infty$ e che raggiunge il suo valore massimo M (il minimo m) per $x=0$ perchè allora

$$(13) \quad \left| \frac{1}{M} F(x) \right| \quad \text{e} \quad \left| \frac{m}{F(x)} \right|$$

sono entrambe due diverse espressioni per la funzione cercata. Assumendo ad es. per $F(x)$ la funzione e^{-x^2} che ha un massimo $=1$ per $x=0$, o la funzione $1+x^2$ che per $x=0$ ha un minimo $=1$ si hanno per la funzione puntiforme fondamentale le espressioni semplicissime

$$(14) \quad |e^{-x^2}|, \quad |(1+x^2)^{-1}|.$$

Se il punto isolato debba corrispondere all'ascissa $x=a$ ed avere un'ordinata $y=k$ si scriverà:

$$(15) \quad k' e^{-(x-a)^2}, \quad k' |1+(x-a)^2|^{-1}.$$

E la funzione fondamentale del piano, o dello spazio, si avrà perciò, in conformità alla (2) od alla (3), scrivendo

$$(16) \quad |e^{-x^2} e^{-y^2}|$$

$$(17) \quad \left| \frac{1}{3} \left(3 - \operatorname{sgn}^2 x - \operatorname{sgn}^2 y - \operatorname{sgn}^2 z \right) \right|.$$

⁽¹⁾ Ved. U. DINI, *Fondam. per la teorica delle funzioni di variabili reali* al § 112 della traduzione tedesca di J. LÜROTH e A. SCHEPP. Lipsia B. G. Teubner, 1892, dove, nello stesso paragrafo è indicata anche la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y|y|}{1+y^2} \left(\frac{1}{1+y^2} \right)^n$ la quale, essendo $=0$ per $y=0$, $=+1$ per $y>0$ e $=-1$ per $y<0$ si potrebbe pensare che esprima $\operatorname{sgn} y$, ma essa contiene già implicitamente questa funzione essendo $|y|=y \operatorname{sgn} y$ e non può perciò servire a rappresentarla.

2. Funzioni che rappresentano più punti. — Se i valori che la funzione prende nei diversi punti sono tutti uguali fra loro, per es. 1 o k , allora la (5) e la (6) si possono semplificare sostituendo alla somma o al prodotto di n funzioni una sola funzione che prende il valore 1 in r punti, come ad esempio

$$(18) \quad |e^{-(x-a_1)^2} \dots (x-a_n)^2|$$

$$(19) \quad k[1 - \operatorname{sgn}^2(x - a_1) \dots (x - a_n)].$$

È notevole il caso di due punti simmetrici rispetto all'origine, come $\pm a$, che si presenta ad esempio nel considerare i vertici dei poliedri e così per rappresentare i vertici del cubo di lato $2a$ col centro nell'origine e le facce parallele ai piani coordinati si ha l'equazione

$$(20) \quad \operatorname{sgn}^2(x^2 - a^2) + \operatorname{sgn}^2(y^2 - a^2) + \operatorname{sgn}^2(z^2 - a^2) = 0.$$

Una equazione analoga si ha per l'ottaedro a tre assi, a, b, c , con i vertici sugli assi coordinati

$$(21) \quad \operatorname{sgn}^2(x^2 - a^2) + \operatorname{sgn}^2(y^2 - b^2) + \operatorname{sgn}^2(z^2 - c^2) = 2.$$

Si hanno così otto o sei punti con soli tre termini; se manca la simmetria bisogna scrivere tanti termini quanti sono i punti, così la funzione puntiforme corrispondente ai vertici del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di raggio r è, in generale

$$(22) \quad r \sum_{k=1}^n \left\{ 1 - \operatorname{sgn}^2 \left(x - \cos \frac{2\pi k}{n} \right) \right\} \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n}.$$

È questo dei vertici del poligono un caso particolare di un tipo più generale di gruppi di punti nei quali tanto le ascisse quanto le ordinate dei punti hanno valori che si succedono con legge assegnata. Così se le ascisse corrispondono ai multipli successivi di uno stesso intervallo Δ e le ordinate sono quelle corrispondenti di una curva $y = f(x)$ alla quale debbono appartenere i punti, il polinomio prende la forma

$$(23) \quad f(x) \sum_{k=1}^n |e^{-(x-k\Delta)^2}|.$$

3. Funzioni puntiformi periodiche. — Si rende periodica la funzione puntiforme fondamentale ponendo nella (13) per $F(x)$ una funzione periodica positiva in tutto il periodo, il cui massimo M

non sia infinito ed il cui minimo m non sia nullo. Si hanno così ad esempio le funzioni

$$(24) \quad | \sin^2 \pi x, \quad | e^{-\sin^2 x}, \quad \left| \sin^2 \frac{\pi x}{\Delta} \right|$$

alle quali corrispondono rispettivamente i periodi 1, π , Δ . Se si vuole che i punti isolati siano distribuiti sulla curva $y = f(x)$ basta porre $f(x)$ a fattore. In particolare se si pone $\sin x$ per $f(x)$ si ha in

$$(25) \quad \sin x | \sin^2 x$$

la funzione periodica puntiforme che prende alternativamente i valori non nulli $+1$, -1 .

Se si adottano coordinate polari, invece di quelle cartesiane, una equazione come

$$(26) \quad \rho = f(\varphi) \left[1 - \operatorname{sgn} \sin^2 \frac{n\varphi}{2} \right]$$

rappresenta i punti d'intersezione della curva $\rho = f(\varphi)$ con i raggi vettori che si succedono ad intervalli angolari costanti $\frac{2\pi}{n}$. In particolare perciò

$$(27) \quad \rho = r \left| \sin^2 \frac{n\varphi}{2} \right|$$

rappresenta i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio r . Se $r = 1$ si hanno così i punti del piano complesso che corrispondono alle radici dell'unità.

Le funzioni puntiformi periodiche del piano e dello spazio si hanno in modo analogo a quello sopra esposto rendendo periodiche delle funzioni del tipo delle (2), (3) e quindi

$$(28) \quad \left| \frac{1}{2} (|\cos^2 \pi x| + |\cos^2 \pi y|) \right|$$

$$(29) \quad |\cos^2 \pi x \cos^2 \pi y \cos^2 \pi z|$$

rappresentano i punti nodali dei reticolati ortogonali del piano e dello spazio ossia l'insieme dei punti i valori delle cui coordinate sono espressi da numeri interi.

Dalla funzione puntiforme spaziale (29) si ottiene immediatamente l'equazione del reticolato cristallino per il parallelepipedo rettangolo di assi $2a$, $2b$, $2c$, scrivendo

$$(30) \quad \text{Punt}(xyz)_\pi \operatorname{Dir} \frac{x}{a} \operatorname{Dir} \frac{y}{b} \operatorname{Dir} \frac{z}{c}$$

dove la (29) è stata indicata brevemente con $\text{Punt}(xyz)_\pi$ e il simbolo $\text{Dir } x$ ⁽¹⁾ indica il « *fattore discontinuo di Dirichlet* », cioè la funzione che ha il valore $+1$ per $|x| < 1$, il valore $\frac{1}{2}$ per $|x| = 1$ il valore zero per $|x| > 1$.

4. Funzioni che rappresentano insiemi numerabili di punti distribuiti con legge assegnata. — Oltre le funzioni periodiche innanzi considerate, presentano un particolare interesse quelle nelle quali la lunghezza dell'intervallo in cui la funzione è nulla varia con legge assegnata. Si ottiene la variabilità dell'intervallo sostituendo alla variabile, nella espressione di una funzione puntiforme periodica, una funzione convenientemente scelta. Così ad esempio delle tre funzioni

$$(31) \quad y_1 = x \left[\text{sen}^2 \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$(32) \quad y_2 = e^x \left[\text{sen}^2(e^x) \right]$$

$$(33) \quad y_3 = \text{sen } x [1 - \text{sgn}(\text{sen}^2 \text{ctg } x)]$$

la prima rappresenta un insieme di punti distribuiti sulla retta $y = x$ e per il quale l'origine è punto di accumulazione: la seconda rappresenta dei punti distribuiti sulla curva $y = e^x$ e con un punto di accumulazione per $x \rightarrow +\infty$; la terza infine dei punti della curva $y = \text{sen } x$ tutti i zeri della quale sono punti di accumulazione.

È chiaro che si può ottenere qualsiasi altra distribuzione desiderata e che il metodo è parimente applicabile anche al caso di funzioni di più variabili.

OSSERVAZIONE. È chiaro che se i valori che le funzioni assumono nei punti nei quali non sono nulle sono tutti uguali all'unità positiva, allora le costruzioni innanzi indicate delle funzioni puntiformi così definite equivalgono a quelle delle « *funzioni caratteristiche* » ⁽²⁾ degli insiemi dei detti punti. E se $F_0(x_n)$ è una funzione puntiforme fondamentale $1 - F_0(x_n)$ sarà invece la funzione caratteristica dell'insieme « *complementare* » cioè di tutto lo spazio meno il punto origine delle coordinate.

Roma. 10 settembre 1929.

⁽¹⁾ Il simbolo $\text{Dir } x$ per indicare il fattore discontinuo di DIRICHLET è stato da me proposto nella mia comunicazione al Congresso dei Matematici di Bologna innanzi citata.

⁽²⁾ Ved. C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'Ensembles. Classes de Baire*, p. 7. Paris, 1916.