# Bollettino Unione Matematica Italiana

Pia Nalli

Sul parallelismo e sulle coordinate geodetiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.5, p. 233–235.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_233_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

PICCOLE NOTE

Sul parallelismo e sulle coordinate geodetiche.

Nota di Pia Nalli (a Catania).

Sunto. - *Si ritorna sopra una costruzione di coordinate geodetiche lungo una linea, data dall'A. per mostrare che essa è perfettamente rigorosa.*

Al principio dello scorso anno, in una Nota pubblicata nei « Rend. della R. Accad. dei Lincei » e che porta il titolo *Sulle coordinate geodetiche*, ho data una costruzione, per varietà a due e tre dimensioni, ma facilmente estensibile a qualunque varietà, di un particolare sistema di coordinate geodetiche lungo una linea. In essa si utilizza *soltanto* il concetto di parallelismo secondo Levi-Civita.

Recentemente mi è stata mossa una obiezione sulla validità di tale costruzione. Mi affretto a rimuoverla.

Comincio con una V_2. In essa è una linea L, su questa un punto P, dove fisso due vettori unitarî u_0 e v_0, diversi dalle direzione della linea in P. Tali vettori sposto per parallelismo lungo L nelle vicinanze di P.

Ho così due vettori u e v funzioni dei punti di L: limitando opportunamente l'intorno di P, posso supporre u e v non tangenti ad L. Per i punti di L traccio le due geodetiche tangenti ad u e v rispettivamente: ho così due sistemi di geodetiche. Ho dimostrato che, prendendoli come sistemi di linee coordinate, si possono fissare queste in modo da risultare geodetiche lungo L nelle vicinanze di P.

Si possono prendere certamente le dette geodetiche come linee coordinate, perchè per ogni punto della varietà in un conveniente intorno di P passa una ed una sola linea di ogni sistema.

Infatti, sulla geodetica tangente al vettore u chiamo σ l'arco, contato in un certo verso, a partire dal punto d'incontro con L, chiamo s l'arco su L a partire da P. Per ogni coppia (s, σ) nelle vicinanze della coppia $(0, 0)$ ho un punto della varietà, ed allor riferita questa a coordinate (x_1, x_2), per la coppia (s, σ) si avrà il punto di coordinate

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(s, \sigma) \\ x_2 = x_2(s, \sigma). \end{cases}$$

In particolare, per $s = 0$, $\sigma = 0$ si hanno le coordinate x_1^0, x_2^0 di P. Ma, inversamente, le (1) definiscono s e σ come funzioni di x_1 ed x_2 nelle vicinanze dei valori $x_i = x_i^0$, $s = 0$, $\sigma = 0$. Infatti

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)_0 = \lambda_0^i, \quad \left(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma}\right)_0 = u_0^i \qquad (i = 1, 2),$$

dove λ_0^i sono i parametri della direzione di L in P ed u_0^i le componenti controvarianti di u_0.

Quindi il jacobiano delle (1) non è nullo in P.

Per conseguenza, per ogni punto della varietà di un intorno di P passa una ed una sola geodetica del primo sistema.

Passiamo al caso di una V_3. La costruzione è la seguente. In un punto P di una linea L si fissano tre vettori u_0, v_0, w_0 indipendenti e tali che risulti indipendente le terna formata da due qualunque di essi e dalla direzione della linea in P. Si spostano i vettori per parallelismo lungo L nelle vicinanze di P: si hanno così tre vettori u, v, w, funzioni dei punti di L. Restringendo opportunamente l'intorno di P si può fare in modo che in ogni punto di L la direzione di questa e due qualunque dei tre vettori risultino indipendenti.

Ed allora si costruiscono i tre sistemi di superficie geodetiche, aventi i poli nei punti di L, determinate dalle tre giaciture (v, w), (w, u), (u, v) e si assumono come sistemi di superficie coordinate. Si possono poi fissare queste in modo da risultare geodetiche lungo L nelle vicinanze di P.

Mi è stata mossa l'obiezione: si possono prendere i tre sistemi di superficie come superficie coordinate? Senza dubbio. Basterebbe, per esempio, occuparsi del primo sistema di superficie, chiamare σ e τ due parametri convenienti che fissino un punto sulla superficie, s l'arco su L a partire da P, e mostrare che un certo sistema di equazioni

$$(2) \qquad x_i = x_i(s, \tau, \sigma) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definisce s, τ, σ come funzioni delle x_i nelle vicinanze di P.

Ma è necessario fare una tale dimostrazione? Io direi di no, perchè quando si forma il jacobiano delle (2) rispetto a s, τ, σ e lo si calcola in P, in esso figureranno solo elementi relativi alla metrica angolare in P; il calcolo si fa per una V_3 qualunque come per una V_3 euclidea e per quest'ultima il jacobiano non è nullo quando a σ e τ si danno significati convenienti, sempre per mezzo di elementi angolari.

Mi pare così di avere rimossa qualunque obiezione: la costruzione da me data di un sistema di coordinate geodetiche lungo una linea è rigorosissima, di una facilità e semplicità che non si potrebbero superare. Non fa intervenire, oltre a quella di parallelismo, che nozioni elementarissime, evita formule e simboli.

Mette poi in vista un fatto importantissimo dal punto di vista dei principî: i concetti di parallelismo, di coordinate geodetiche lungo una linea, di varietà euclidea osculatrice lungo una linea, di derivazione di un tensore lungo una linea, sono ***equivalenti****, e da uno si possono dedurre gli altri con eguale facilità e semplicità.*

(I quali tutti si possono anche ridurre alla formula di trasformazione dei simboli di CHRISTOFFEL per un cambiamento di coordinate).

Didatticamente è preferibile partire dal concetto di parallelismo perchè questo si può introdurre con facilità, con rigore e senza eccessivo formalismo.

Palermo, settembre 1929.