UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 225–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_225_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

In sèguito alla risposta alla questione n.° 37 di (*l. t.*) apparsa nell' ultimo numero di questo « Bollettino », nella quale vien ricordata la formola di maggiorazione

$$\int_a^b u^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \tag{1}$$

per le funzioni $u(x)$ nulle in a e b, faccio notare come, con pari semplicità, si possa provare un' analoga formola di maggiorazione, per le funzioni $u(x)$, nulle insieme con la prima derivata in a e b, ove si sostituisca all' integrale del quadrato della derivata prima l' integrale del quadrato della derivata seconda.

La prima idea che si presenterebbe, per ottenere una siffatta formola, sarebbe quella di applicare due volte successivamente la (1), ciò che porta alla disuguaglianza

$$\int_a^b u^2 dx \leq \frac{(b-a)^4}{\pi^4} \int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx. \tag{2}$$

Una maggiorazione più ristretta si ottiene, però, applicando la relazione [1]

$$(\max |u|)^2 \leq \frac{(b-a)^3}{192} \int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx, \tag{3}$$

la quale dà la migliore limitazione possibile per il $\max |u|$ in funzione dell' integrale del quadrato di $\frac{d^2u}{dx^2}$.

[1] M. Picone, *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione, ecc.*, (« Math. Zeitschrift », Bd. 28, Heft 4, 1928) p. 552.

Dalla (3) si deduce sùbito, infatti,

$$\int_a^b u^2 dx \leq \frac{(b-a)^4}{192} \int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx; \tag{4}$$

e il coefficiente numerico 192 che comparisce al denominatore in quest'ultima formola è già notevolmente superiore al π^4, che figura nella (2), il quale vale circa 97.

Ma il coefficiente dell'integrale a secondo membro della (4) si può ancora ridurre considerevolmente.

Si osservi, infatti, che, detta α la più piccola radice positiva della equazione trascendente

$$1 - \cos\alpha \cosh\alpha = 0,$$

posto per brevità $\frac{\alpha}{b-a} = \lambda$, sussiste l'identità [1]

$$\int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx - \lambda^4 \int_a^b u^2 dx =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda \frac{\operatorname{sen}\lambda(x-a)\cosh\lambda(x-a) - \operatorname{senh}\lambda(x-a)\cos\lambda(x-a)}{1-\cos\lambda(x-a)\cosh\lambda(x-a)} \frac{du}{dx} + \right.$$

$$\left. + \lambda^2 \frac{\operatorname{sen}\lambda(x-a)\operatorname{senh}\lambda(x-a)}{1-\cos\lambda(x-a)\cosh\lambda(x-a)} u\right]^2 dx.$$

Di qui si deduce che è sempre

$$\int_a^b u^2 dx \leq \frac{(b-a)^4}{\alpha^4} \int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx, \tag{5}$$

il segno uguale potendo sussistere soltanto a patto che sia, a meno di un arbitrario fattore costante,

$$u(x) = (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{senh}\alpha)[\cos\lambda(x-a) - \cosh\lambda(x-a)] -$$
$$- (\cos\alpha - \cosh\alpha)[\operatorname{sen}\lambda(x-a) - \operatorname{senh}\lambda(x-a)].$$

Il coefficiente dell'integrale a secondo membro della (5) non può, quindi, ridursi ulteriormente: si noti, del resto, che il coefficiente α^4 della (5) è già molto più grande del 192 che figura nella (4); esso vale, infatti, circa 500. GIANFRANCO CIMMINO

[1] Quest'identità è caso particolare di un'altra che ho dimostrata in una Memoria di prossima pubblicazione nella « Math. Zeitschrift ».