Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori esteriLavori di: G. Polya, V. Smirnoff, F. Vasilesco, G. Valiron, B. Hostinsky, J. Wolff, J. Hadamard, P. Bessonoff, Lainé, S. Serghiesco, H. Milloux, N. Obrechkoff, A. Khintchine, R. Nevanlinna, S. A. Janczewski, J. Chokhate, T. Radò J. A. Lappo-Danilevski, M. Plancherel, A. Kovanko, J. Delsarte, P. Fatou, M. Janet, L. Tumarkin, R. Gosse, Th. Anghelutza, A. Buhl, O. Onicescu, L. Fantappiè, S. Stoïlow, H. Cartan, G. de Rham, P. Montel, P. Lévy, N. Saltykow, A. Froda, A. Kolmogoróff, R. Caccioppoli, M. Soula, P. Flamant, G. A. Gheorghiu, C. Lurquin, S. Bernstein, G. Calugaréano, H. Milloux, G. Valiron, S. Mandelbrojt, De Possel, A. Roussel, J. Favard, W. Brecka e J. Gueronimus, A. Denjoy

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 211–224.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

G. Pólya: *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* (« Mathematische Zeitschrift », 29).

En acceptant l'aimable invitation de M. le Président de l'Union Mathématique Italienne, je vais donner un résumé du travail: *Recherches sur les lacunes et les singularités des séries entières.* Ce travail consiste en trois chapitres nettement séparés, chacun apportant une contribution différente à l'étude des relations entre singularités et coefficients de la série de Taylor. J'exposerai ici surtout le II chapitre et je ne mentionnerai que très brièvement le I.

1. Considérons une suite croissante de nombres positifs λ_1, λ_2, λ_3,... tels que la différence $\lambda_{n+1}-\lambda_n$ possède une borne inférieure positive. (Dans les applications, λ_1, λ_2,... seront les indices de certains coefficients d'une série entière). Si la limite de n/λ_n existe pour $n \to \infty$, on nommera la suite *mesurable* et la limite obtenue sa *densité.* Mais une suite n'est pas mesurable en général et cela nous oblige d'introduire et d'étudier d'autres notions de « densité »; c'est ce qui se fait dans le premier chapitre. Voici un des problèmes qui se présentent: Etant donnée une suite quelconque λ_1, λ_2,..., démontrer que parmi toutes les suites mesurables qui la contiennent, il en existe une dont la densité est minimum et calculer cette densité d'une manière directe en partant de λ_1, λ_2,.... La densité obtenue, qui doit être nommée la densité *maximum* de la suite donnée λ_1, λ_2,..., est visiblement analogue à la mesure extérieure d'un ensemble de points ou à l'intégrale par excès d'une fonction.

2. Si la série

$$\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^{n+1}}+\dots=f(z) \tag{1}$$

n'est pas partout divergente, la série entière

$$a_0+\frac{a_1 z}{1!}+\dots+\frac{a_n z^n}{n!}+\dots=F(z) \tag{2}$$

représente une fonction entière, dont le module maximum ne croit pas plus vite que celui d'une certaine exponentielle e^{Hz}; nous dirons brièvement que $F(z)$ est de *type exponentiel.* Le II chapitre associe à chaque fonction $F(z)$ de type exponentiel un domaine convexe I borné et fermé, nommé le *diagramme indicateur* de $F(z)$, et montre que ce diagramme joue un rôle prépondérant dans plusieurs questions relatives à $F(z)$ dont voici les principales:

a) L'ordre de grandeur de $F(z)$ le long de la demi-droite de direction φ issue de l'origine est donné par l'expression

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\log|F(re^{i\varphi})| = h(\varphi);$$

cet ordre est donc une fonction de l'angle variable φ. Phragmén et Lindelöf ont montré que la fonction $h(\varphi)$ ne peut pas être quelconque et en ont trouvé plusieurs propriétés assez compliquées. Toutes ces propriétés peuvent être condensées dans l'énoncé géométrique suivant: *La fonction* h(φ) *est la « fonction caractéristique » (Stützfunktion) d'un domaine convexe borné*, du diagramme indicateur I. Cela veut dire que chacun des demi-plans

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h(\varphi) \leqq 0, \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

contient I et a, avec I, un point frontière commun. Cet énoncé géométrique épuise les propriétés de $h(\varphi)$; car un domaine convexe quelconque I donné à l'avance peut être pris pour le diagramme indicateur d'une fonction entière appropriée.

b) Borel a montré, en étudiant la sommation exponentielle, que les singularités de la série (1) (qu'il envisage sous une forme légèrement différente) sont étroitement liées à la croissance de la fonction entière (2). Pour arriver à un énoncé simple et complet, il faut définir, d'après Minkowski, ce que c'est qu'un point extrême d'un domaine convexe K: c'est un point qui est situé sur la frontière de K, mais qui n'est situé sur aucun segment rectiligne sans extrémités faisant partie de la frontière de K. P. e. tous les points frontières d'un cercle sont des points extrêmes; seulement les sommets sont points extrêmes d'un polygone convexe. Avec cette définition, on peut dire que f(z) *est régulière à l'extérieur du domaine* $\bar{\mathrm{I}}$, *symmétrique à* I *par rapport à l'axe réel et que chaque point extrême de* $\bar{\mathrm{I}}$ *est point singulier de* f(z). Les points frontières de $\bar{I}$ qui ne sont pas extrêmes, peuvent mais ne doivent pas être réguliers pour $f(z)$.

c) Pincherle a introduit une classe de transformations linéaires dont chacune est liée à une fonction entière de type exponentiel. Celle liée à la fonction (2) transforme une fonction donnée $\psi(z)$ en

$$\psi^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \psi(z-u)f(u)du.$$

l'intégrale étant étendue le long d'une courbe fermée contenant I et ne contenant aucune singularité de $\psi(z-u)$. Sous certaines conditions, souvent mais pas toujours remplies, on peut aussi adopter la forme plus familière

$$\psi^*(z) = a_0\psi(z) - \frac{a_1\psi'(z)}{1!} + \frac{a_2\psi''(z)}{2!} - + \ldots.$$

Le diagramme indicateur I sert aussi à décrire les singularités de ψ^* en partant de celles de ψ. P. e. *si* $\psi(z)$ *est une fonction uniforme n'ayant que des points singuliers isolés* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *et si tous les domaines* $s_1 + \bar{I}$, $s_2 + \bar{I}$, $s_3 + \bar{I}, \ldots$ *sont extérieurs les uns aux autres,* $\psi^*(z)$ *est régulière et uniforme à l'extérieur de ces domaines, mais admet tous leurs points extrêmes comme points singuliers.* ($s + \bar{I}$ désigne ce que devient le domaine $\bar{I}$ après une translation parallèle dont le vecteur est s). En appliquant ce théorème au cas particulier $\psi(z) = 1/z$ on a le résultat sous b) et en l'appliquant à $\psi(z) = (1 - e^{-z})^{-1}$ on obtient quelques compléments des résultats connus sur la série souvent étudiée

$$\psi^*(z) = F(0) + F(1)e^{-z} + F(2)e^{-2z} + \ldots.$$

3. Une fonction entière prend, comme Julia a découvert, toute valeur, sauf une au plus, une infinité de fois dans un entourage angulaire quelconque de certaines demi-droites issues de l'origine qu'on appelle « demi-droites à la Julia ». A. Bloch a relevé la curieuse analogie entre les deux faits : « Chaque série entière à rayon de convergence infini admet une demi-droite à la Julia — chaque série entière à rayon de convergence fini admet un point singulier sur le cercle de convergence ». Ses pressentiments se trouvent réalisés dans une certaine mesure dans le III chapitre où les théorèmes suivants sont démontrés ([1]):

Supposons que G(z) *soit une fonction entière d'ordre infini; alors :*

I. *Les demi-droites à la Julia de* G(z) *forment un ensemble fermé; inversement, un ensemble fermé quelconque de demi-droites*

([1]) La numération des théorèmes n'est pas la même ici que dans le travail analysé.

peut être considéré comme l'ensemble des demi-droites à la Julia de quelque fonction entière appropriée G(z).

II. *Si les coefficients de* G(z) *sont tous positifs ou tous contenus dans un angle dont le sommet est l'origine et dont l'ouverture est inférieure à π, l'axe positif réel est une demi-droite à la Julia pour* G(z).

III. *Si les coefficients de* G(z) *sont réels et la densité maximum des changements de signe est Δ, l'angle d'ouverture $2\pi\Delta$ dont le bisecteur est l'axe réel positif, contient au moins une demi-droite à la Julia de* G(z).

IV. *Si la densité des coefficients est zéro, chaque demi-droite issue de l'origine est à la Julia.*

V. *Si la densité maximum des coefficients est Δ, chaque angle fermé d'ouverture $2\pi\Delta$ contient au moins une demi-droite à la Julia.*

VI. *Si* G(z) *est quelconque, il suffit de changer le signe d'une infinité de coefficients convenablement choisis pour que chaque demi-droite issue de l'origine devienne à la Julia pour la nouvelle série.*

Tous ces théorèmes se changent en théorèmes connus si on remplace « fonction entière d'ordre infini » par « série entière à rayon de convergence fini » et « demi-droite à la JULIA » par « point singulier sur le cercle de convergence ». La démonstration qui utilise des résultats des deux chapitres précédents, rend compte des raisons de cette analogie curieuse, puisque les deux théorèmes correspondants, celui sur les droites à la JULIA et celui sur les points singuliers, y apparaissent comme deux corollaires différents du même théorème plus général.

Il reste une question à élucider : Lesquels de ces théorèmes restent valables pour les fonctions entières d'ordre fini ? P. e. II et III ne le restent pas, comme l'exemple simple de e^z le montre. Mais bien qu'on sache qu'aussi sous d'autres aspects les fonctions entières d'ordre infini ressemblent davantage aux séries à rayon de convergence fini que celles d'ordre fini, on serait tenté de croire que p. e. IV et VI ne sont pas restreints à l'ordre infini.

Les méthodes employées donnent aussi certains résultats pour les fonctions entières d'ordre fini, dont le plus caché est probablement le théorème IX, p. 631 qui contient en particulier le fait qu'*une fonction entière d'ordre fini ne possède pas de valeur asymptotique finie si la densité de ses coefficients est zéro.*

Recensioni delle Note di *Analisi* pubblicate nei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences di Parigi », T. 186 (1° semestre 1928).

V. SMIRNOFF (« Comptes Rendus », pag. 21).

Sia Γ una curva chiusa nel piano della variabile complessa, rettificabile di lunghezza l, l'A. considera i polinomi ortogonali su questa curva, tali cioè, che:

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma} P_n(x)\overline{P_m(x)}d\sigma = \varepsilon_{nm}, \qquad \begin{matrix}(\varepsilon_{nm}=0, \text{ se } n \neq m),\\ (\varepsilon_{nm}=1, \text{ se } n = m).\end{matrix}$$

F. VASILESCO (Ibid., pag. 23).

Trasforma una condizione data da WIENER [1], per la regolarità d'un punto al contorno, condizione che permette di formare semplicemente punti regolari ed irregolari.

G. VALIRON (Ibid., pag. 26).

Dà un teorema generale sulle funzioni meromorfe d'ordine positivo, che generalizza, nello stesso tempo, due teoremi l'uno di di BOREL sull'esponente di convergenza degli zero di $f(z)=a$, e l'altro di JULIA e OSTROWSKY.

B. HOSTINSKY (Ibid., pagg. 59 e 487).

Il problema della mescolatura delle carte, studiato recentemente da HADAMARD, può essere applicato, come mostra l'A., a problemi più generali, e precisamente a variabili continue.

Nella seconda Nota porta dei complementi alla prima.

J. WOLFF (Ibid., pagg. 62 e 565).

Modifica un enunciato sulla serie

$$\sum \frac{A_k}{x - a_k} \text{ [2]}.$$

Nella seconda Nota dimostra il teorema seguente: « Se

$$S = \sum_1^{\infty} |A_k| < \infty, \quad \text{e} \quad \sum \frac{A_k}{x - a_k} = 1$$

su una curva rettificabile Γ, la serie essendo uniformemènte convergente su Γ, allora $S \geq cd$, essendo d il diametro di Γ e c una costante assoluta ».

(1) WIENER, *On the Dirichlet Problem*. « Bull. Massach. Inst. of Tech. », (1924) p. 130.

(2) « Comptes Rendus », T. 185, p. 1250.

J. HADAMARD (Ibid., pagg. 62, 189 e 275).

Mostra la grande importanza di una Nota di HOSTINSKY (¹).

Nella seconda Nota riprende la questione e la riattacca ad una equazione integrale e pone in evidenza un caso singolare che dovrebbe essere delucidato.

Nella terza Nota estende il metodo ai problemi della meccanica celeste ad m parametri.

P. BESSONOFF (Ibid., pag. 63).

Continua i suoi studi sulle funzioni quasi-periodiche (²), ed utilizzando il metodo delle famiglie normali, ottiene una condizione nuova affinchè una funzione meromorfa sia quasi-periodica.

LAINÉ (Ibid., pag. 209).

Continua le sue ricerche sulle equazioni alle derivate parziali e considera le equazioni $s = f(x, y, z, p, q)$ integrabili col metodo di DARBOUX e che sono di genere ≥ 3, per ciascun sistema di caratteristiche.

S. SERGHIESCO (Ibid., pag. 211).

Ottiene le radici comuni a più equazioni simultanee in un campo, mediante degli integrali di invarianti differenziali del sistema estesi al campo.

H. MILLOUX (Ibid., pag. 213).

Si sa che i punti ove una funzione intera è di modulo grandissimo costituiscono dei campi semplicemente connessi che si estendono all'∞. Dà una proposizione che fissa un minimo dell'estensione angolare di alcuni di questi campi.

N. OBRECHKOFF (Ibid., pagg. 215, 356 e 1813).

Generalizza la nozione di convergenza assoluta per la serie Σa_n, introducendo la serie

$$A_k(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n(\omega - \lambda_n)^k,$$

con $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \to \infty$, e $k > 0$; la serie Σa_n è sommabile d'ordine $K > 0$, od (R, λ, K), se $\lim\limits_{\omega \to \infty} \dfrac{A_k(\omega)}{\omega^k}$ tende verso un limite finito

(¹) « Comptes Rendus », T. 186 (1928), p. 59.
(²) « Comptes Rendus », T. 182 (1926), p. 1011.

quando $\omega \to \infty$, è sommabile assolutamente d'ordine K. od $[R, \lambda, K]$, se $\int_A^\infty \left| \frac{d}{d\omega}\left(\frac{A_k(\omega)}{\omega^k}\right) \right| d\omega$ è convergente ove A è arbitrario positivo.

Studia le serie di DIRICHLET e riattacca questo metodo di sommazione a quello di RIESZ (1).

Nella seconda Nota studia dei criteri generali che permettono di decidere se una serie è sommabile con il metodo di CESARO; fa vedere che la serie introdotta nella equazione di KEPLERO $u - e \operatorname{sen} u = M$, e procedente secondo le potenze dell'eccentricità è sommabile col metodo di BOREL, se $e \leq 0{,}803$.

Nella terza Nota tratta della sommabilità delle serie di TAYLOR sul contorno del poligono di sommabilità con il metodo di BOREL.

A. KHINTCHINE (Ibid., pag. 285).

Indica una condizione sufficiente per l'applicabilità della « legge forte » dei grandi numeri ad una successione di variabili eventuali.

R. NEVANLINNA (Ibid., pag. 289).

Studia la possibilità, se per due funzioni meromorfe $f_1(z)$ ed $f_2(z)$, le equazioni $f_i = a_j$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ possono avere le stesse radici. I casi $h = 3$ e 4 sono stati considerati da H. CARTAN e PÓLYA, l'A. studia il caso $h = 5$.

S. A. JANCZEWSKI (Ibid., pagg. 287 e 413).

Ripartisce nella prima Nota in dieci forme canoniche i sistemi differenziali lineari del tipo di STURM del quarto ordine e identici ai loro aggiunti.

Nella seconda Nota mostra che alcuni di questi sistemi possiedono dei teoremi di oscillazione (2).

J. CHOKHATE (Ibid., pag. 344).

Le successioni ortogonali dei polinomi di TCHEBYCHEFF conducono ad una formula di quadratura meccanica, l'A. studia la convergenza della formula.

(1) « Comptes Rendus », T. 148 (1909), p. 1658: « Comptes Rendus », T. 149 (1909), p. 18, p. 909. G. H. HARDY e M. RIESZ, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge, « Tracts. », 18 (1915), pp. 21-66; KOGBETLIANTZ « Bulletin des Sciences Math. », 49 (1915), p. 234.

(2) « Comptes Rendus », T. 184 (1927), p. 261.

T. Radò (Ibid., pag. 346).

Completa le ricerche di Montel sulle funzioni subarmoniche [1] e dimostra il teorema: » Sia $u(x, y)$ una funzione continua e positiva in un campo D, affinchè $\log u(x, y)$ sia subarmonica è necessario e sufficiente che $e^{\alpha x + \beta y} u(x, y)$ sia subarmonica, per tutti i valori reali di α e β.

J. A. Lappo-Danilevski (Ibid., pag. 349).

Continua una sua Nota precedente [2], e tratta della risoluzione algoritmica del problema di Poincaré per i sistemi differenziali lineari a coefficienti razionali arbitrari.

M. Plancherel (Ibid., pag. 351).

Dà una dimostrazione rigorosa di una proposizione enunciata da Bromwich [3] sull'importanza delle trasformazioni di Laplace nella integrazione di una classe di problemi misti di tipo iperbolico e sullo sviluppo in serie di una coppia di funzioni arbitrarie.

A. Kovanko (Ibid., pagg. 354 e 729).

Dà nella prima Nota delle generalizzazioni delle funzioni quasi-periodiche del Bohr introducendo sia la misura degli insiemi, ove $\varphi(x) = |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ non ha luogo, sia degli integrali definiti su $\varphi(x)$ e $\varphi^2(x)$.

Nella seconda Nota generalizza ancora la Nota precedente.

J. Delsarte (Ibid., pagg. 415, 1095, 1412 e 1513).

Nella prima Nota tratta delle trasformazioni lineari funzionali e le rotazioni funzionali non euclidee e dimostra che il nucleo H d'una trasformazione lineare di Fredholm reale può mettersi sotto una delle forme $H = kS = \Sigma k$, k essendo il nucleo d'una rotazione funzionale reale, S e Σ quelle di due dilatazioni funzionali (cioè S e k sono dei nuclei simmetrici e reali). Questo teorema permette di determinare le rotazioni funzionali non euclidee.

Nella seconda Nota tratta di certi gruppi di rotazioni funzionali non euclidei.

Nella terza Nota tratta di un gruppo di rotazioni funzionali

(1) « Comptes Rendus », T. 185 (1927), p. 633; F. Riesz, « Acta Math. », 48 (1926), p. 329.

(2) « Comptes Rendus », T. 185 (1927), p. 1181.

(3) « Proc. Lond. Math. Soc. », (1916), T. 15.

ad un parametro e di certe equazioni integro-differenziali che vi si riattaccano.

Nella quarta Nota studia un gruppo di rotazioni funzionali ad un parametro e le equazioni alle derivate funzionali che vi sono legate.

P. FATOU (Ibid., pag. 416).

Considera i sistemi

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \qquad (i = 1, 2),$$

ove

$$f_i = A_{0i} + \sum_1^\infty \left(A_{p,i} \cos \frac{pt}{\varepsilon} + B_{p,i} \operatorname{sen} \frac{pt}{\varepsilon}\right),$$

e le A e B sono funzioni continue che dipendono da x_1, x_2 ed ε e soddisfano a certe condizioni di convergenza. L'A. dimostra che gli integrali di questo sistema, definito dalle condizioni iniziali date, tendono, per $\varepsilon = 0$, verso dei limiti che verificano il sistema analogo, ove le f_i sono rimpiazzate da $A_{0i}(x_1, x_2, 0)$.

M. JANET (Ibid., pag. 418).

Considera il sistema

$$\frac{A(v)}{A(u)} = \frac{B(v)}{B(u)} = \frac{C(v)}{C(u)},$$

ove le A, B, C indicano tre trasformazioni infinitesimali indipendenti, di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e dimostra che ammette una soluzione dipendente da una sola funzione arbitraria di $n-1$ variabili e di arbitrarie di genere inferiore.

L. TUMARKIN (Ibid., pag. 420).

Studia la struttura dimensionale degli insiemi chiusi, e mostra che gli elementi essenziali che determinano la struttura d'un insieme chiuso ad n dimensioni sono le molteplicità cantoriane nel senso di URYSOHN [1].

R. GOSSE (Ibid., pag. 489).

Mostra che i risultati da lui ottenuti permettono di rispondere a numerose questioni poste da LAINÉ sulle equazioni

$$s = qf(x, y, z, p).$$

(1) « Comptes Rendus », T. 175 (1922), p. 440 ; « Fund. Math. », 7, (1926), p. 30.

TH. ANGHELUTZA (Ibid., pag. 559).

Considera i nuclei complessi $N(x, y)$ a variabili reali x, y di una equazione di FREDHOLM tali che N sia uguale al suo coniugato e mostra diverse proprietà che godono questi nuclei.

A. BUHL (Ibid., pagg. 560 e 830).

Nella prima Nota mostra che la costruzione d'un gruppo continuo può farsi dipendere dalla considerazione di operatori permutabili.

Nella seconda Nota introducendo un'operatore differenziale permutabile con la differenziazione effettuata sulle equazioni del triedro mobile di DARBOUX, ottiene dei risultati che fanno vedere la possibilità di avvicinare alla teoria di EINSTEIN i bei lavori di COSSERAT sulla sintesi delle teorie fisiche [1].

O. ONICESCU (Ibid., pag. 563).

Studia le proprietà topologiche della trasformazione definita da una funzione uniforme della variabile complessa ed in particolar modo le trasformazioni multivalenti.

L. FANTAPPIÈ (Ibid,, pag. 619).

L'A. dimostra che ad ogni funzione si può associare una matrice in modo che alla somma ed al prodotto di due funzioni corrisponda la somma ed il prodotto delle matrici. Inoltre, imponendo delle condizioni, mostra che si può, mediante la teoria dei funzionali analitici, dovuti all'A., determinare gli elementi della matrice.

S. STOÏLOW (Ibid., pag. 621).

Sia

$$x = x(x, y), \quad y = y(x, y),$$

una trasformazione definita in un campo aperto Ω, tale che ad ogni punto interno ad un campo chiuso di Ω corrisponda un punto interno al campo trasformato e tale che non esistano dei campi continui Ω che corrispondano ad un unico punto, l'A. mostra che i punti che corrispondono in Ω ad un punto x ed y sono isolati.

H. CARTAN (Ibid., pag. 624).

Tratta di un teorema di A. BLOCH sulle questioni di unicità nella teoria delle funzioni meromorfe [2].

[1] *Théorie des corps déformables*, Paris, 1909; « Bull. Ann. Fac. Sc. Toulouse », 19 (1927), p. 1.

[2] « Ann. École Norm. », 43 (1926), p. 321; « Comptes Rendus », T. 185 (1927), p. 1253; R. NEVANLINNA, « Comptes Rendus », T. 186 (1928), p. 289.

G. DE RHAM (Ibid., pag. 670).

Continua un lavoro di H. WEYL [1] sull'intersezione dei q cicli ed $x-q$ cicli d'ordine infinito che non possono fornire invarianti nuovi altro che se n è multiplo di 4, e mostra con un esempio che questi invarianti sono effettivamente nuovi.

P. MONTEL (Ibid., pag. 672).

Completando una teoria celebre di WEIERSTRASS l'A. dimostra che ogni funzione continua della variabile reale x che ammette un teorema d'addizione algebrica è una funzione algebrica di x, e^x, o di una funzione ellittica. L'A. ricerca inoltre le funzioni continue f di variabile reale tali che $f(x \pm y)$ siano funzioni razionali od un polinomio in $f(x)$ ed $f(y)$; queste funzioni si riconducono ad x od e^x con una sostituzione lineare.

P. LÉVY (Ibid., pag. 674).

Considera una successione infinita di insiemi lineari, ed analizza le proprietà di questi insiemi che non sono modificati quando si modifica solamente questi insiemi per x inferiore ad un numero positivo limitato, e studia l'insieme comune all'∞ e ad una infinità numerabile d'insiemi.

N. SALTYKOW (Ibid., pag. 676).

Applica le condizioni date da LEVI-CIVITA [2] alla ricerca delle equazioni della dinamica a due parametri che si possono integrare per separazione delle variabili, ottiene così il caso di LIOUVILLE e due altri tipi che generalizzano le equazioni di STÄCKEL.

A. FRODA (Ibid., pagg. 728 e 1350).

L'A. stabilisce che in ogni caso una funzione uniforme della variabile reale non può prendere al più che una infinità numerabile di discontinuità di prima specie.

Nella seconda Nota dà una nuova classificazione delle discontinuità di una funzione uniforme di variabile reale che generalizza un teorema classico dato da BAIRE.

A. KOLMOGOROFF (Ibid., pag. 824).

Giustifica una formula stabilita da KHINTCHINE [3] relativa alla speranza matematica in casi molto estesi.

[1] WEYL, *Analysis situs combinatoria*. « Rev. math. Hisp. Amer. », 5 (1913), p. 12.

[2] « Math. Annalen », 44 (1893), p. 413.

[3] « Comptes Rendus », T. 186 (1928), p. 286.

R. CACCIOPPOLI (Ibid., pag. 832).

Indica una condizione necessaria e sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, condizione che utilizza la definizione di integrale secondo BOREL e la considerazione di certi insiemi appartenenti all'intervallo d'integrazione [1].

M. SOULA (Ibid., pag. 834).

Apporta dei complementi al principio di PICARD studiato da BOULIGAND [2] e studia il caso che il campo sia piano limitato da n curve chiuse senza punti doppi e non aventi che un solo punto comune.

P. FLAMANT (Ibid., pag. 836).

Sia $t(r)$ una funzione positiva crescente, $r = |x|$, chiama norma di una funzione intera e la indica con

$$\|\varphi_n\| = \overline{\lim} \frac{|\varphi_n(x)|}{t(r)},$$

se questo lim $\to 0$ con $n \to \infty$ dice che le funzioni intere $\varphi_n(x)$ convergono uniformemente relativamente a $t(r)$, e generalizza in modo analogo le nozioni di funzioni normali e di funzioni olomorfe.

G. A. GHEORGHIU (Ibid., pag. 838).

Continua le sue ricerche sulle trascendenti di FREDHOLM relative ai nuclei ottenuti con la composizione di un numero finito di nuclei integrabili.

C. LURQUIN (Ibid., pag. 928).

Continua alcuni suoi studi sul valore medio di una o più variabili eventuali nel calcolo delle probabilità [3]; in questa Nota studia i valori medi delle differenze successive di scarti semplici.

S. BERNSTEIN (Ibid., pagg. 840 e 1090).

Studia il valore asintotico Ep dello scarto minimo fra -1 e $+1$ del prodotto $p(x)$ $(x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n)$ ed ottiene una relazione funzionale semplice verificata da Ep.

Nella seconda Nota mostra che i polinomi di JACOBI possono realizzare lo scarto minimo.

(1) « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 52.
(2) « Comptes Rendus », T. 176 (1926), p. 1366.
(3) « Comptes Rendus », T. 175 (1922), p. 681.

G. CALUGARÉANO (Ibid., pagg. 930 e 1406).

Chiama funzione poligena della variabile complessa z una funzione continua tale che $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. P e Q continue ed una volta derivabili rispetto ad x ed a y. Il limite di f_z' dipende dalla direzione secondo cui si calcola il rapporto incrementale. Fa delle applicazioni alle equazioni differenziali del secondo òrdine.

Nella seconda Nota determina tutte le equazioni differenziali del secondo ordine integrabili con quadrature e stabilisce che queste equazioni sono quelle che ammettono soluzioni poligene.

H. MILLOUX (Ibid., pag. 933).

Recenti studi sul numero delle radici delle funzioni meromorfe hanno mostrato l'importanza del passaggio da un campo (corona circolare, settore di corona circolare ecc.) ad un campo più piccolo: appoggiandosi a dei teoremi di R. NEVANLINNA e P. BOUTROUX, l'A. ottiene dei teoremi che possono servire di base a questo passaggio.

G. VALIRON (Ibid., pagg. 935 e 1183).

Servendosi della Nota precedente di MILLOUX completa numerose proprietà che ha dato sugli zero delle funzioni meromorfe [1].

Nella seconda Nota continua lo studio delle proprietà delle funzioni meromorfe, utilizzando la nota di MILLOUX ed un teorema di BOUTROUX sul minimo del modulo di un polinomio, e mostra che si può fare disparire il secondo termine logaritmico dalle sue ineguaglianze sui raggi dei centri nei quali una funzione meromorfa prende in generale n volte almeno ogni valore.

S. MANDELBROJT (Ibid., pagg. 937 e 1039).

Il teorema della moltiplicazione delle singolarità di HADAMARD non si applica immediatamente alle serie di DIRICHLET. L'A. mostra, facendo delle ipotesi su a_n e b_n, che le sole singolarità di $\Sigma a_n e^{-x_n s}$ sono i punti $\alpha + \beta$, ove α sono le singolarità di $\Sigma a_n e^{-ns}$ e β quelle di $\Sigma e^{-\lambda_n s}$.

Nella seconda Nota generalizza i risultati precedenti.

DE POSSEL (Ibid., pag. 1092).

Se esiste una superficie di RIEMANN Φ di cui una porzione F' corrisponda biunivocamente e conformemente ad una superficie F, dice che Φ è la continuazione di F: indica numerosi esempi, e pone delle questioni interessanti sui tipi di superficie di RIEMANN.

(1) « Acta Math. », 52 (1928), p. 67.

A. ROUSSEL (Ibid., pagg. 1096 e 1807).

Nella prima Nota studia l'operazione che consiste a rimpiazzare il limite del rapporto dell'accrescimento di una funzione ad un altra funzione che non sia a variazione limitata. Studia il problema analogo a quello della integrazione.

Nella seconda Nota introduce il concetto di pseudo-derivata e ne studia le proprietà [1].

J. FAVARD (Ibid., pag. 1181).

Dalla riduzione delle forme binarie a coefficienti interi si deduce che se x_1, x_2,..., x_n sono n interi algebrici coniugati radici di una medesima equazione algebrica a coefficienti interi di n grado, tra questi vi è una coppia x_i, x_j tale che

$$|x_i - x_j| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

E studia il massimo di $|x_i - x_j|$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

W. BRECKA e J. GUERONIMUS (Ibid., pag. 1187).

Applicano il metodo di S. BERNSTEIN [2] e risolvono il problema seguente: « Determinare il minimo di oscillazione nell'intervallo $(-1, +1)$ dei polinomi non decrescenti di grado n la cui derivata seconda raggiunge in un punto dell'intervallo il valore t. Considerano inoltre i polinomi monotoni d'ordine $h+1$ ».

A. DENJOY (Ibid., pag. 1181).

Completando i lavori di WOLFF dimostra l'impossibilità di una identità della forma

$$\sum \frac{A_n}{x - a_n} = \frac{1 + \Sigma_p(x)}{x},$$

in tutti i punti di un arco rettificabile; $\Sigma |A_n|$ essendo finita, $a_n \neq 0$, la serie uniformemente convergente su questo arco, ed Σ_p olomorfa ed $|\Sigma_p| < 1 - m$, $m > 0$ per speciali valori di x.

(1) Vedasi A. ROUSSEL, *Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires.* « Acta Math. », 52:1-2, 1929, pag. 87.

(2) *Leçons sur les propriétés extrémales, etc.* Gauthier-Villars, p. 67; « Comptes Rendus », T. 185 (1927), p. 247.

(continua)