Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Quartiehe piane e superficie cubiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 203–210.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_203_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Quartiche piane e superficie cubiche.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

Sunto. - *Il metodo di* GEISER *pone notoriamente un'intima relazione fra le rette di una superficie cubica,* F^3, *e le bitangenti di una quartica piana,* C_4. *In questa Nota l'A. mostra come detto metodo, completato da un'osservazione di* CAYLEY *sulla notazione di* HESSE *per le bitangenti di* C_4, *conduca in modo elementare a stabilire varie proposizioni — in parte nuove — sulle* F^3 *e sulle* C_4.

1. Data una superficie del 3° ordine generale, F^3, le sue 27 rette si possono — al modo solito — rappresentare coi simboli (di SCHLAEFLI) a_i, b_k e c_{ik} (per i, $k = 1, 2, \ldots, 6$) (¹). Seguendo GEISER (²), una quartica piana generale, C_4, può ottenersi come contorno apparente di F^3 da un suo punto generico P su d'un piano π: le 28 bitangenti di C_4, sono in tal caso le proiezioni da P su π di dette rette, e la traccia r su π del piano tangente in P a F^3. Colla notazione di HESSE (³), queste bitangenti si posson indicare colle combinazioni binarie dei numeri da 1 ad 8, per modo ad esempio che sia $78 \equiv r$, e che le rette $7i$, $8k$, ik (per i, $k = 1, 2, \ldots, 6$) risultino rispettivamente le proiezioni da P su π delle a_i, b_k, c_{ik}. Le terne di bitangenti di C_4 si distinguono con FROBENIUS (⁴) in *sizigetiche* od *azigetiche*, a seconda che i relativi 6 punti di contatto con C_4 sono o non sono su di una stessa conica: delle 3276 terne di bitangenti, 1260 sono sizigetiche e 2016 azigetiche.

CAYLEY ha osservato (⁵) che le relazioni geometriche fra le 28 bitangenti di C_4, rappresentate al modo di HESSE, non si al-

(¹) Ved. per questo, e per le proprietà elementari delle rette di F^3 usate in seguito, E. BERTINI, *Complementi di Geometria proiettiva* (Bologna, Zanichelli, 1927), § 11, pag. 241 e seg.

(²) C. F. GEISER, *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades*, « Math. Ann. », 1 (1869), p. 129.

(³) O. HESSE, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung*, « Journ. f. Math. », 49 (1855), p. 279.

(⁴) G. FROBENIUS, *Ueber die Beziehung zwischen den 28 Doppeltangenten eines ebenen Curve vierter Ordnung*, « Journ. f. Math. », 99 (1886), p. 278.

(⁵) A. CAYLEY, *Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre*, « Journ. f. Math. » 68 (1868), p. 176.

terano eseguendo sui numeri 1, 2, ..., 8 una qualunque *sostituzione ordinaria* o *bifida* (¹): egli inoltre ha indicato i vari gruppi di bitangenti, con dei simboli geometrici: ad esempio delle 1260 terne sizigetiche, 840 (del tipo 12, 34, 56) hanno il simbolo |||, e le restanti 420 (del tipo 12, 23, 34) hanno il simbolo |_|.

2. Le rette di una bissestupla si proiettano da un qualunque punto dello spazio su d'un piano, secondo 12 rette che toccano una stessa curva della 3^a classe (²). Si hanno pertanto dei gruppi di 12 bitangenti di C_4 che toccano una curva siffatta, come ad es.

$$\begin{pmatrix} 71 & 72 & 73 & 74 & 75 & 76 \\ 81 & 82 & 83 & 84 & 85 & 86 \end{pmatrix} \text{ proveniente dalla bissestupla } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

e rappresentabile col simbolo , od anche come

$$\begin{pmatrix} 71 & 72 & 73 & 56 & 64 & 45 \\ 23 & 31 & 12 & 84 & 85 & 86 \end{pmatrix} \text{ proveniente dalla bissestupla } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

e rappresentabile col simbolo .

I gruppi rappresentabili in tali guise, son complessivamente in numero di 63, mutati l'uno nell'altro dalle varie sostituzioni ordinarie e bifide. Di essi solo 36 — quelli che non contengono la retta r — provengono da bissestuple di F^3: la considerazione dei restanti 27 mostra che:

Fissata una qualunque delle 27 rette di F^3, *se ne hanno altre 10 ad essa incidenti: le 11 rette così ottenute complessivamente, si proiettano da ogni punto* P *di* F^3 *secondo 11 piani che risultano tangenti ad uno stesso cono di* 3^a *classe, che è pure toccato dal piano tangente in* P *ad* F^3.

Ognuno dei 27 fasci di coniche giacenti su F^3, dà per proiezione da P su π un sistema di coniche di contatto di C_4: da qui segue che i suddetti 63 gruppi di 12 bitangenti, non sono altro che i noti *gruppi di* STEINER.

(¹) Le sostituzioni *bifide* si ottengono dividendo i numeri 1, 2, ..., 8 in due gruppi di quattro, e sostituendo ad una coppia d'uno stesso gruppo, la coppia dei due restanti elementi del medesimo. Ad es. la sostituzione bifida (1234, 5678) non muta le bitangenti 15, 16, ecc., mentre scambia fra loro 12 e 34, 13 e 24, ecc.

(²) Infatti, siccome le 12 rette di una bissestupla costituiscono una figura autoduale, esse appartengono ad una medesima superficie della 3^a classe.

3. Colle 27 rette di F^3, si possono formare 360 gruppi costituiti da due terne di generatrici di schiere opposte *di una stessa quadrica,* quali ad esempio $(c_{12}, c_{23}, c_{31}; c_{45}, c_{56}, c_{64})$, oppure $(c_{12}, c_{13}, c_{14}; c_{56}, a_1, b_1)$, od infine $(c_{13}, c_{14}, a_2; c_{25}, c_{26}, b_1)$. Poichè sei rette siffatte si proiettano sempre su d'un piano secondo sei tangenti d'una conica, così, in base al n. 1, risulta che:

Le 28 bitangenti di C^4 *si distribuiscono in 1008 gruppi (mutati l'uno nell'altro dalle varie sostituzioni ordinarie o bifide) di sei rette ciascuno, le quali sono tangenti ad una stessa conica, e fra loro a tre a tre azigetiche; di tali gruppi*

280 *sono rappresentabili col simbolo* △ △, *come p. es.* 12, 23, 31, 45, 56, 64;
168 » » » » ⩛ |, » 12, 13, 14, 17 18, 56;
560 » » » » ⩛ ⩛, » 13, 14, 18, 25, 26, 27.

Ritornando ad F^3, si vede facilmente che i suddetti gruppi di bitangenti di C_4 provengono solo in parte da gruppi di 6 rette che si possono segare su F^3 mediante una quadrica; e precisamente, oltre ai 360 ottenibili in tal guisa, se ne hanno 432 provenienti dalle varie *5-ple di 1ª specie* di F^3 (1) considerate colla relativa *cinquisecante,* e 216 contenenti tutti *la retta* r $\equiv$ 78 ed ulteriormente 5 rette che provengono dalle varie *5-ple di 2ª specie* di F^3. Si ha pertanto che:

Le 5 rette di una 5-pla di 1ª specie di F^3 *e la relativa cinquisecante, vengono proiettate da ogni punto di* F^3 *secondo 6 piani che risultano tangenti ad uno stesso cono quadrico* (2).

Le 5 rette di una 5-pla di 2ª specie di F^3, *vengon proiettate da un qualunque punto* P *di* F^3 *secondo 5 piani, che, in un col piano tangente in* P *ad* F^3, *toccano uno stesso cono quadrico.*

4. F^3 ha notoriamente 45 *piani tritangenti,* distribuibili in 720 coppie di piani segantisi lungo rette non giacenti su F^3. Due piani di una coppia siffatta, determinano su F^3 due trilateri fra

(1) Una 5-pla — costituita da 5 rette di F^3 *a due a due sghembe* — dicesi *di 1ª* o *di 2ª specie,* a seconda ch'essa ammette una sola o due rette *cinquisecanti.*

(2) Questa notevole proposizione è stata data da A. Clebsch (« Math. Ann. », 1 (1869), p. 258-9) — il quale l'attribuisce a J. Lüroth — in modo inesatto, in quanto egli la riferisce alle varie 5-ple di rette di F^3, senza far distinzione fra 5-ple di 1ª e di 2ª specie. Essa trovasi riportata in guisa ancor meno corretta da W. F. Meyer, nell'Articolo *Flächen dritter Ordnung* dell'« Encykl. der Math. Wiss. », Band. III_2, Heft 10, p. 1462.

loro *prospettivi*. quali ad esempio (c_{12}, c_{34}, c_{56} e c_{45}, c_{61}, c_{23}). oppure (a_1, b_3, c_{13} e c_{12}, a_2, b_1), od infine (a_1, b_2, c_{12} e c_{13}, c_{24}, c_{56}). Proiettando da P su π, e tenendo presente il n. 1, si ottiene che

Le 28 bitangenti di C_4 *si distribuiscono in 5040 gruppi (mutati l'uno nell'altro dalle varie sostituzioni ordinarie o bifide) di sei rette ciascuno, rappresentabili*

1680 *col simbolo* $<\!\!=\!\!>$, *come p. es.* 12, 23, 34, 45, 56, 61,
840 » » $|\times|$, » » » 12, 13, 17, 18, 27, 38,
2520 » » $\underline{\vee\vee}$, » » » 13, 17, 24, 28, 12, 56;

uno qualunque di questi gruppi si può, in quattro modi diversi, decomporre in due terne sizigetiche di bitangenti, costituenti due trilateri fra loro omologici.

Dei suddetti gruppi di 6 bitangenti di C_4, solo 720 provengono nel modo indicato da coppie di piani tritangenti di F^3: i rimanenti si dividono in due categorie, a seconda che contengono o non contengono la retta $r \equiv 78$. I gruppi della prima categoria sono in numero di 1080, e, astraendo dalla retta 78, comprendono tutte le proiezioni da P su π dei vari gruppi di 5 rette di F^3 tali che una risulti sghemba colle altre quattro, le quali per contro costituiscano un quadrilatero sghembo. I gruppi della seconda categoria sono in numero di 3240, e sono le proiezioni da P su π dei gruppi di 6 rette di F^3 che sono costituiti da due coppie di rette mutuamente sghembe, e da due rette fra loro incidenti, che si appoggiano l'una alle due rette dell'una e l'altra a quelle dell'altra delle due coppie prima considerate. In virtù del n.° 1, da qui risulta che:

I quadrilateri sghembi costituiti da 4 delle 27 rette di F^3 *sono in numero di 1080, e ciascuno di questi determina una ed una sola delle restanti 23 rette di* F^3, *sghemba con ognuno dei suoi lati; i piani che da un qualunque punto* P *di* F^3 *proiettano i lati di un quadrilatero siffatto e la retta ulteriore sghemba con essi, in un col piano tangente in* P *ad* F^3, *costituiscono (in 4 modi diversi) due triedri omologici* [1].

Il numero delle 4-ple di rette (a due a due sghembe) di F^3, è pure 1080; divise comunque, in uno dei tre modi possibili, le rette di una 4-pla in due coppie, esiste una ed una sola retta di F^3

[1] Ciò può stabilirsi direttamente, osservando che *le* ∞^3 F^3 *che contengono i lati di un dato quadrilatero sghembo, ed una retta* a *ulteriore che non si appoggi a nessuno di essi, sono composte colle coniche intersezioni dei piani per* a *colle varie quadriche passanti pei lati del quadrilatero.*

che si appoggia alle due rette della prima coppia ed a nessuna retta dell'altra, e parimenti esiste una ed una sola retta di F^3 che si appoggia alle due rette della seconda coppia ed a nessuna retta della prima; le due rette così costruite risultano incidenti fra loro in un punto O, ed insieme alle rette della 4-pla considerata danno un gruppo di 6 rette di F^3 del secondo dei tipi dianzi indicati. Per ciò che precede:

F^3 *risulta il luogo dei punti dello spazio, per cui il piano che congiunge le due rette condotte per esso ad appoggiarsi alle rette dell'una e dell'altra delle due coppie considerate di rette sghembe, passa per* O.

Questa proposizione fornisce subito un'elegante *costruzione lineare* per punti di F^3, a cui però già era pervenuto — per tutt'altra via — H. SCHROETER [1].

5. Le 16 rette che restano dalle 27 di F^3 togliendone una arbitraria e le 10 a questa incidenti, sono notoriamente tali che ognuna ne ammette altre 5 ad esse incidenti, costituenti una 5-pla di 1ª specie. Quelle 16 rette possono pertanto distribuirsi in 16 gruppi formati da una 5-pla di 1ª specie colla relativa cinquisecante, per modo che ciascuna di esse sta in 6 di tali gruppi. Dicendo, con E. CIANI, che le 16 rette che avanzano dalle 28 bitangenti di C^4 togliendo le 12 di un gruppo di STEINER, costituiscono un *gruppo di* KUMMER [2], in base al n. 3 segue che:

Le 16 bitangenti di un gruppo di KUMMER *sono a 6 a 6 tangenti a 16 coniche. Queste 16 coniche e le 16 bitangenti suddette, sono tali che ciascuna delle prime è tangente a 6 delle seconde, e viceversa.*

(1) H. SCHROETER, *Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche*, « Journ. f. Math. », 96 (1884), p. 282. - La costruzione cui si allude nel testo è la seguente. Date nello spazio due coppie di rette sghembe r, r' ed s, s', e un punto O generico, ogni piano per O determina su quelle, due coppie di punti R, R' ed S, S'; al variare del piano per O, il punto d'intersezione delle rette RR' ed SS' descrive una *superficie cubica*, che contiene le due coppie di rette date e le due rette che si possono condurre da O ad appoggiarsi alle rette di tali coppie. Inversamente, ogni F^3 generale può venir costruita per punti in tal guisa, in 3240 modi diversi.

(2) Ved. E. CIANI, *Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la configurazione di Kummer*, « Ann. di Mat. », vol. 2 (3) 1898, p. 65. La ragione della denominazione, è legata alla possibilità di considerare C_4 come sezione piana di una superficie di KUMMER; ed è appunto basandosi su tale possibilità, che il CIANI perviene (a pag. 70 del lavoro cit.) a stabilire la bella proposizione che qui è ottenuta per altra via.

La dimostrazione di questa proposizione segue in modo ancora più immediato dai n.i 1, 2 e 3, osservando che colle 16 rette che restano dalle 28 bitangenti di C_4 togliendo quelle di un gruppo di Steiner $\triangle\triangle$, si possono in 16 modi diversi costruire dei gruppi azigetici $\vee\vee$.

I gruppi di Kummer sono complessivamente in numero di 63; 27 si ottengono da F^3 nel modo anzidetto; gli altri 36 contengono la retta $r \equiv 78$, e (n.° 2) sono ulteriormente costituiti dalle proiezioni da P su π dei *vari gruppi di 15 rette che si hanno dalle 27 di* F^3, *sopprimendo le 12 rette di una bissestupla* (¹).

6. 15 rette di F^3 del tipo testè considerato (p. es. le 15 c_{ik}), in un coi 15 piani tritangenti che le congiungono a tre a tre, costituiscono una configurazione tale che ogni retta sta in tre piani, ed ogni piano contiene tre rette. Per proiezione da P su π, da qui — tenendo presenti i n.i 1 e 4 — si deduce che:

Colle 15 rette che restano dalle 16 di un gruppo di Kummer *sopprimendone una, si possono costruire 15 terne sizigetiche a quest'ultima; ognuna di quelle 15 rette sta in tre terne, ed inoltre due terne senza elementi comuni costituiscono sempre due trilateri omologici.*

Il numero dei suddetti gruppi di 15 bitangenti è $63 \cdot 16 = 1008$.

7. È noto che (²) le 12 rette che avanzano dalle 27 di F^3 sopprimendo le 12 rette di una bissestupla ed altre 3 rette fra loro complanari, possono in due modi diversi venir segate su F^3 da un tetraedro; i due tetraedri che così son determinati, diconsi mutuamente *coniugati*: essi risultano omologici, e le 12 rette di F^3 che hanno servito a definirli, sono le intersezioni delle facce non omologhe dei due tetraedri. Proiettando da P su π, si ha — avuto riguardo ai n.i 1, 4 e 6 — che:

Colle 28 bitangenti di C_4 *si posson formare* $1008 \cdot 15 = 15120$ *gruppi di 12 rette, le quali si distribuiscono in due modi diversi in 4 trilateri a due a due omologici, in guisa inoltre che ogni trilatero della prima suddivisione risulta omologico ad uno della seconda. Gli assi delle omologie fra queste 4 coppie di trilateri, de-*

(¹) Ciò mostra che *una bitangente di* C_4 *entra in 36 gruppi di* Kummer — e non in 27, com'è detto a p. 66 della Mem. cit. alla nota precedente — il che è confermato dal fatto che il numero dei gruppi di Kummer risulta proprio uguale a $\frac{28 \cdot 36}{16} = 63$.

(²) Cfr. H. Taylor, « London Tranc. », 185 (1894), p. 37.

terminano un quadrilatero piano, per i cui 6 vertici passano gli assi delle omologie che intercedono fra i 4 trilateri della prima suddivisione presi a due a due, e gli assi analoghi relativi alla seconda suddivisione.

8. Coi 45 piani tritangenti di F^3 si possono notoriamente costruire *120 coppie di triedri coniugati di* STEINER, tali cioè che le 9 rette d'intersezione delle facce dell'uno colle facce dell'altro triedro, stiano su F^3; queste coppie si distribuiscono in 40 gruppi di 3, ciascuno dei quali contiene complessivamente *tutte* le 27 rette di F^3. Da qui, mediante le solite considerazioni (n.i 1 e 4), si deduce che:

Colle 28 bitangenti di C_4 *si possono formare dei gruppi di 9 rette, che in due modi diversi si distribuiscono in 3 trilateri a due a due omologici, aventi lo stesso centro d'omologia; i tre assi di omologia relativi ad una delle due possibili suddivisioni in trilateri, concorrono nel centro d'omologia relativo all'altra* (1).

Si ha inoltre che *esistono delle terne di gruppi siffatti senza alcun elemento in comune, tali che due qualunque dei trilateri di cui al precedente enunciato, relativi a gruppi distinti, risultano omologici fra loro.* Precisamente, colle 27 rette che restano escludendo una qualunque delle 28 bitangenti, si possono formare 120 di quei gruppi, distribuiti in 40 terne del tipo suddetto; il numero dei gruppi è pertanto $28 \cdot 120 = 3360$, e quello delle terne è 1120.

9. Ricordando quanto è stato detto ai n.i 1, 2 e 5, si formano subito i simboli dei gruppi di KUMMER — i quali sono di due tipi diversi — e si vede che *due diversi gruppi di* KUMMER *hanno sempre in comune 8 o 10 elementi.* Precisamente, uno qualunque di questi 63 gruppi si trova nella prima relazione con 30 gruppi ulteriori e nella seconda con 32, talché il numero delle coppie di gruppi di KUMMER aventi 8 elementi a comune è $\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 30 = 945$: ciascuno dei 945 gruppi di 8 elementi che così si ottengono, può — in tre modi diversi — venir diviso in due quaterne di bitangenti sizigetiche: di essi rispettivamente 210, 315 ed i restanti 420, hanno il simbolo △ ||, □ □ e ◇.

Si può vedere che *se due gruppi di* KUMMER *hanno 10 rette in comune, queste stanno in un terzo gruppo di* KUMMER. Pertanto

(1) Ved. E. CIANI, Mem. cit., pp. 77-78, ove questa proposizione vien stabilita da un altro punto di vista.

il numero dei gruppi di 10 bitangenti di C_4 comuni a due — e quindi a tre — diversi gruppi di KUMMER, è $\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 63 \cdot 32 = 336$. *Ciascuno di essi si può ottenere — in tre modi diversi — sopprimendo in un gruppo di* KUMMER *uno dei 16 gruppi azigetici di 6 bitangenti che questo contiene* (n. 5): questo fatto, da cui seguono subito i simboli (di due tipi diversi) dei suddetti gruppi di 10 bitangenti, permette di riaverne il numero complessivo $\frac{1}{3} \cdot 63 \cdot 16 = 336$.

Basandosi sul n. 8, si ha da ultimo che *ciascuno dei gruppi di 9 bitangenti considerati in quel numero, appartiene a tre diversi gruppi di* KUMMER, *onde è pure contenuto in uno dei suddetti gruppi di 10 bitangenti; reciprocamente, sopprimendo uno qualunque dei 10 elementi di uno di questi 336 gruppi, si ottiene uno dei 3360 gruppi di cui al n. 8* [1].

[1] Cfr. E. CIANI, Mem. cit., p. 79.