Filippo Odone

Sulla espressione assoluta di alcune formule fondamentali della teoria matematica dell'elasticità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 195–202.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_195_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Sulla espressione assoluta di alcune formule fondamentali della teoria matematica dell'elasticità.

Nota di FILIPPO ODONE (a Torino).

Sunto. - *Richiamate e precisate le definizioni e le ipotesi dell'ordinaria teoria matematica dell'elasticità* (n.i 1 e 2), *si ottengono l'espressione del potenziale unitario d'elasticità* (n.° 3), *e la relazione tra l'omografia* β *delle pressioni e l'omografia* α *delle deformazioni* (n.° 4), *indipendentemente da coordinate. Si applicano* (n.° 5) *i risultati dei numeri precedenti ai corpi elasticamente isotropi, opportunamente definiti. Infine si fa vedere che l'espressione del potenziale unitario d'elasticità in funzione delle componenti della deformazione dipende da 21 coefficienti. Tutti i calcoli sono fatti usando il calcolo omografico dei proff.* C. BURALI-FORTI *e* R. MARCOLONGO.

1. Omografia di deformazione. — Si consideri un sistema materiale continuo [1].

Indicheremo con P il punto generico di esso.

[1] Sul significato fisico da attribuire all'espressione *corpo continuo* si può vedere quanto è detto in BOUASSE, *Théorie de l'élasticité*, Paris, Delagrave, 1920, pag. 3, come pure il recentissimo volume: *Christalographie*, dello stesso autore.

Supporremo che lo stato del sistema sia completamente noto quando si conosce la posizione di ogni suo singolo punto.

Fissiamo una volta per tutte uno stato del sistema, che chiameremo il suo *stato iniziale*.

Diremo che il sistema ha subito una deformazione, se il suo stato attuale differisce dallo stato iniziale: si individua una deformazione dando il vettore s dello spostamento subito da ogni punto P a partire dallo stato iniziale; s è una funzione del punto generico P del corpo non deformato [1] che supporremo continua e derivabile. Posto

$$\varkappa = \frac{ds}{dP},$$

e detto δP_1 l'elemento lineare corrispondente a δP dopo la deformazione, si trova facilmente, come è noto,

$$\delta P_1 = (1 + \varkappa)\delta P.$$

Questa $\varkappa$ si chiama l'*omografia di deformazione* [2].

2. Omografia delle pressioni. — Supporremo che nello stato iniziale e in tutti quelli che si deducono da esso con un semplice moto di corpo rigido, il sistema non sia sottoposto a nessuna forza [3].

Immaginiamo che il sistema si deformi e sia mantenuto nello stato deformato (non deducibile da quello iniziale con un semplice moto di corpo rigido) per l'azione di un certo sistema di forze.

A proposito di questo sistema di forze, si fanno le seguenti ipotesi:

le forze applicate all'elemento di massa dm sono riducibili all'unica forza $\rho F d\tau$, essendo $d\tau$ il volume occupato dalla massa dm, ρ la densità nel punto considerato ed F un vettore funzione del punto;

(1) Per ben valutare le conseguenze di questa osservazione, vedi BOUASSE, loc. cit., pag. 45.

(2) Le proprietà di $\varkappa$ sono esposte in forma assoluta nel II vol. della « Analyse vect. » di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, nel caso che mod s sia infinitesimo. Per le deformazioni finite vedi DUHEM, *Recherches sur l'élasticité*, Paris, Gauthier-Villars, 1906; e BURGATTI, « Mem. Acc. », Bologna, 1914.

(3) Su quest'ipotesi vedi BOUASSE, loc. cit., pag. 4. Quando non si faccia quest'ipotesi, si possono ottenere delle conseguenze ben diverse da quelle che più sotto esporremo; vedi, ad es., DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*. Hermann, Paris, 1891, tome II, pag. 221.

le forze applicate all'elemento di superficie $d\sigma$ sono riducibili all'unica forza $F_n d\sigma$, essendo F_n un vettore definito in ogni punto della superficie.

Infine si ammette che per l'equilibrio del sistema sono necessarie e sufficienti le condizioni d'equilibrio valide per un sistema rigido e che, per di più, esse sono verificate per qualunque porzione del corpo (1).

In queste condizioni è facile dimostrare che esiste (2) una *dilatazione* β tale che le forze di massa $\rho F d\tau$ e quelle di superficie $F_n d\sigma$ che mantengono il corpo deformato sono date da

$$\begin{cases} F_n = \beta \boldsymbol{n} \\ \rho F = \operatorname{grad} \beta, \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario, normale alla superficie e volto verso l'interno del corpo.

In generale questi elementi dovrebbero essere assegnati come funzioni del punto generico del *corpo deformato*: ma ordinariamente si considerano deformazioni infinitesime, ed allora, come è noto, gli elementi predetti si possono considerare funzioni del punto generico del *corpo* ***non*** *deformato*.

Ne segue, in particolare, che tutte le integrazioni che dovremo eseguire nel seguito vanno estese al volume ed alla superficie del corpo ***non*** *deformato*.

Dall'ipotesi che sul corpo non deformato *non* agiscano forze, risulta che β è funzione soltanto di $D\alpha$, e che inoltre β si annulla con $D\alpha$. Vedremo più oltre qual'è la relazione ordinariamente ammessa tra β e $D\alpha$.

3. Potenziale d'elasticità. — Un corpo subisca, a partire dallo stato iniziale, una deformazione infinitesima, caratterizzata dall'omografia α, ed assuma un nuovo stato di equilibrio, in cui il sistema di forze ad esso applicato è caratterizzato dall'omografia β.

(1) Queste ipotesi, da CAUCHY in poi, sono quelle ordinariamente ammesse per giungere alle equazioni dell'equilibrio: vedi DUHEM, *Hydrodynamique*, tome II, pag. 249. Sulla deduzione delle equazioni d'equilibrio dal principio generalizzato dei lavori virtuali, vedi DUHEM, *Recherches sur l'élasticité*, Ch. II, pag. 19, ed anche DUHEM, *Traité d'énergétique*, tome II, pag. 194; in questi lavori è interessante notare l'esistenza di coppie elementari, che invece non possono esistere nelle ipotesi da noi ammesse. Sull'esistenza di queste coppie elementari vedi anche BOUASSE, loc. cit., pag. 10.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit., pag. 25.

In questo nuovo stato d'equilibrio valgono le condizioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \beta \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_n, & \text{in superficie,} \\ \operatorname{grad}\beta = \rho \boldsymbol{F}_v, & \text{in tutto il volume,} \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il vettore unitario normale alla superficie iniziale e volto verso l'interno, ed $\boldsymbol{F}_n d\sigma$, $\rho \boldsymbol{F}_v d\tau$, con $\boldsymbol{F}_n$ e $\boldsymbol{F}_v$, vettori funzioni note dei punti del corpo non deformato, rappresentano le forze agenti sugli elementi di superficie e di volume.

Ammessa l'esistenza di una energia potenziale di elasticità, facilmente si dimostra ch'essa vale, per unità di volume.

$$-\frac{1}{2} I_1(\beta\alpha), \quad \text{od anche} \quad -\frac{1}{2} I_1(\beta \cdot D\alpha).$$

Ecco qui una dimostrazione semplice e diretta.

Si può pensare di passare dallo stato naturale allo stato deformato definito da $\boldsymbol{s}(P)$ attraverso a stati intermedi definiti dai vettori $\varepsilon \boldsymbol{F}_n(P)$, $\varepsilon \boldsymbol{F}_v(P)$, $\varepsilon \boldsymbol{s}(P)$, essendo ε un numero reale variabile da 0 ad 1 ([1]).

Nel passare dallo stato definito dal valore ε a quello definito dal valore $\varepsilon + d\varepsilon$, ogni punto del corpo subisce lo spostamento $(\varepsilon + d\varepsilon)\boldsymbol{s} - \varepsilon\boldsymbol{s} = d\varepsilon \cdot \boldsymbol{s}$ e quindi il lavoro fatto dalle forze applicate al corpo, in questa trasformazione elementare, è espresso da

$$\int_v \varepsilon\rho \boldsymbol{F}_v \times \boldsymbol{s} d\varepsilon \cdot d\tau + \int_\sigma \varepsilon \boldsymbol{F}_s \times \boldsymbol{s} d\varepsilon \cdot d\sigma,$$

dove le integrazioni si intendono estese al volume e alla superficie dello stato iniziale.

Il lavoro totale vale dunque

$$\int_0^1 \varepsilon d\varepsilon \left[\int_v \rho \boldsymbol{F}_v \times \boldsymbol{s} \cdot d\tau + \int_\sigma \boldsymbol{F}_s \times \boldsymbol{s} \cdot d\sigma \right],$$

ossia, per le (1),

$$\frac{1}{2}\int_v \operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{s} \cdot d\tau + \frac{1}{2}\int_\sigma \beta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} \cdot d\sigma = -\frac{1}{2}\int_v I_1\left(\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{dP}\right) d\tau.$$

ricordando che β è dilatazione ed applicando la formula [2] di [A. V. G., I, pag. 234] ([2]).

([1]) Questo modo di raffigurare analiticamente la deformazione, è indicato, ad es., in BOUASSE, loc. cit., pag. 15.

([2]) Con l'abbreviazione A. V. G., I intendiamo riferirci a: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale Generale*, vol. I, *Trasformazioni lineari*, 2ª ediz., Zanichelli, Bologna, 1929.

Poichè $\alpha = \frac{ds}{dP}$, e tenendo conto che β è dilatazione, resta dimostrato il teorema.

Al numero H definito da

$$2H = -I_1(\alpha \cdot \beta) = -I_1(\beta \cdot D\alpha),$$

si dà appunto il nome di *potenziale unitario d'elasticità.*

4. Relazione tra le omografie β e $D\alpha$. — Ricordiamo anzitutto la definizione di operatore lineare [A. V. G., I, pag. 21].

Siano U, U' due sistemi lineari: diremo che l'operatore f, tra gli U e gli U', è un operatore lineare quando e solamente quando

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ma) = mf(a),$$

qualunque siano gli elementi a, b di U e qualunque sia il numero reale relativo m.

Sia f operatore lineare tra gli U e gli U' e sia a l'elemento generico di U: allora $f(a)$ è un U', *funzione lineare* degli U.

Ciò posto, vogliamo dimostrare il seguente teorema:

Dire che l'omografia η è funzione lineare dell'omografia φ, equivale a dire che esprimendo linearmente sia φ che η mediante nove omografie linearmente indipendenti fissate una volta per tutte, le nove coordinate di η sono ciascuna combinazione lineare delle nove coordinate di φ.

Infatti, siano $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_9$ nove omografie linearmente indipendenti. Ogni altra omografia φ si può mettere sotto la forma

$$\varphi = x_1\theta_1 + \ldots + x_9\theta_9,$$

essendo $x_1, \ldots, x_9$ dei numeri reali.

Un'omografia η, funzione qualunque di φ, espressa mediante $\theta_1, \ldots, \theta_9$ risulterà della forma

$$\eta = f(\varphi) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_9)\theta_1 + \ldots + \varphi_9(x_1, \ldots, x_9)\theta_9.$$

Supponiamo che f sia operatore lineare; allora considerando una nuova omografia

$$\varphi' = x_1'\theta_1 + \ldots + x_9'\theta_9$$

dev'essere verificata la condizione

$$f(\varphi + \varphi') = f(\varphi) + f(\varphi'),$$

ossia

$$\varphi_1(x_1 + x_1', \ldots, x_9 + x_9')\theta_1 + \ldots = \{\varphi_1(x_1, \ldots, x_9) + \varphi_1(x_1', \ldots, x_9')\}\theta_1 + \ldots$$

da cui

$$\varphi_r(x_1 + x_1', \ldots, x_9 + x_9') = \varphi_r(x_1', \ldots, x_9) + \varphi_r(x_1', \ldots, x_9') \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9).$$

Ma da questa condizione si ricava [1]:

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_9) = a_{r1}x_1 + \ldots + a_{r9}x_9 \qquad (r = 1, \ldots, 9)$$

con a_{rs} $(r, s = 1, 2, \ldots, 9)$ numeri reali. c. d. d.

Nella teoria ordinaria dell'elasticità si ammette che le sei componenti di β siano ciascuna combinazione lineare delle sei componenti di $D\alpha$ [2].

Poichè le dilatazioni formano un sistema lineare a sei dimensioni, dal teorema dimostrato risulta che l'enunciato, sotto forma assoluta, della proprietà ora ricordata è il seguente:

β, dilatazione delle pressioni interne, è funzione lineare di $D\alpha$, *dilatazione delle deformazioni* [3].

5. Corpi elasticamente isotropi [4]. — Si dice che un corpo è elasticamente isotropo se, scelta una direzione arbitraria all'interno di esso, sono verificate le seguenti due condizioni:

(1) E. BOREL, *Sur la théorie des formes linéaires.* « Nouvelles Annales de mathématiques », s. V, t. II, ottobre 1923, pag. 1.

(2) Questa proprietà, nel caso di piccole deformazioni, fu dedotta dal 2° principio della termodinamica da Lord KELVIN and TAIT, *Treatise on natural philosophy.* Cambridge, 1923, part II, pag. 462.

(3) Dall'ipotesi della linearità si ricava facilmente (vedi A. V. G., vol. II, pag. 42) che considerando due deformazioni a cui corrispondono le omografie α, β per la 1ª, ed α', β' per la 2ª, si ha

$$I_1(\beta\alpha') = I_1(\beta'\alpha).$$

Abbiamo visto che se esiste un'energia potenziale elastica, essa per unità di volume vale

$$-\frac{1}{2} I_1(\beta\alpha).$$

Ne risulta che la variazione di energia potenziale dovuta alle variazioni $\delta\alpha$ dell'omografia di deformazione e $\delta\beta$ dell'omografia delle pressioni interne, vale

$$-\frac{1}{2}\delta I_1(\beta\alpha) = -I_1(\beta\cdot\delta\alpha) = -I_1(\delta\beta\cdot\alpha).$$

Tale risultato è un caso particolare della *legge di reciprocità.* Vedi DUHEM, *Traité d'énergétique,* pag. 414.

(4) Diciamo *elasticamente* isotropo, perchè un corpo può essere isotropo rispetto a certe proprietà fisiche ed anisotropo rispetto ad altre. A questo proposito vedi Lord KELVIN and TAIT, loc. cit., part II, pag. 217, ed anche DUHEM, *Énergétique,* pag. 407.

a) l'allungamento dell'unità di lunghezza secondo quella direzione, è proporzionale [1] alla componente delle tensioni secondo la stessa direzione, cioè all'intensità della componente, secondo quella direzione, della forza applicata all'unità di area ortogonale a quella direzione;

b) quest'allungamento è accompagnato in tutte le direzioni ad esso ortogonali, da una contrazione dell'unità di lunghezza, proporzionale [2] all'allungamento stesso.

Da questa definizione si ricava subito la ben nota relazione tra le omografie β e $D\alpha$; cioè

$$\beta = - l \cdot I_1 D\alpha - 2m D\alpha,$$

essendo l, m due numeri reali costanti.

Infatti, siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tre vettori che definiscono una terna ortogonale unitaria positiva e consideriamo i piani ad essi normali. Le componenti delle *tensioni*, secondo le direzioni dei predetti vettori, valgono $-\beta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$, $-\beta\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$, $-\beta\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}$. Posti eguali ad $\frac{1}{E}$ e a k i coefficienti di proporzionalità sopra indicati, la dilatazione dell'unità di lunghezza, secondo la direzione definita da $\boldsymbol{a}$, vale

$$-\frac{1}{E}\beta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + \frac{k}{E}\beta\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} + \frac{k}{E}\beta\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c} = -\frac{1+k}{E}\beta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + \frac{k}{E}I_1\beta.$$

Ma la dilatazione dell'unità di lunghezza secondo la direzione definita da $\boldsymbol{a}$ vale anche $\boldsymbol{a}\times D\alpha\boldsymbol{a}$ [A. V. G., II, pag. 19].

E poichè $\boldsymbol{a}$ è arbitrario, risulta

$$D\alpha = -\frac{1+k}{E}\beta + \frac{k}{E}I_1\beta.$$

Prendendo l'I_1 dei due membri risulta

$$I_1\beta = -\frac{E}{1-2k}\cdot I_1 D\alpha,$$

e quindi sostituendo

$$\beta = -\frac{Ek}{(1-2k)(1+k)}\cdot I_1 D\alpha - \frac{E}{1+k}D\alpha;$$

(1) Il reciproco del valore numerico del coefficiente di proporzionalità è, con opportuna scelta dell'unità di misura, eguale al valore numerico del modulo di Joung. Sulla definizione di questo e sulla legittimità della sua introduzione, vedi, ad es., BOUASSE, *Essais de matériaux*. Gratier et Rey, Grenoble, 1905, pag. 50 e seguenti.

(2) Questo coefficiente numerico di proporzionalità è noto sotto il nome di *coefficiente di Poisson*.

di qui, ponendo,

$$l = \frac{Ek}{(1-2k)(1+k)}, \quad 2m = \frac{E}{1+k},$$

si ottiene la formula da dimostrare (si è posto l e m in luogo dei simboli λ e μ più comunemente usati, perchè qui le lettere greche sono usate per rappresentare omografie).

Osservazione. — Siano i, j, k tre vettori costanti che definiscono una terna unitaria, ortogonale, positiva.

Possiamo porre

$$D\alpha = x_1 H(i, i) + x_2 H(j, j) + x_3 H(k, k) + \\ + x_4 DH(j, k) + x_5 DH(k, i) + x_6 DH(i, j);$$
$$\beta = y_1 H(i, i) + \ldots + \ldots + y_4 DH(j, k) + \ldots + \ldots$$

Tenendo conto della formula

$$H(u, v) \cdot H(a, b) = u \times b \cdot H(a, v)$$

si calcola facilmente $\beta \cdot D\alpha$ e quindi $I_1(\beta \cdot D\alpha)$: si ottiene così

$$I_1(\beta \cdot D\alpha) = y_1 x_1 + \ldots + y_6 x_6 .$$

Se supponiamo β funzione lineare di $D\alpha$, cioè

$$y_r = \sum_{s=1}^{6} a_{rs} x_s \qquad (r = 1, \ldots, 6),$$

$I_1(\beta \cdot D\alpha)$ è funzione omogenea di 2° grado nelle x_r $(r = 1, \ldots, 6)$; ne risulta subito che

$$2y_r = \frac{\partial}{\partial x_r} I_1(\beta \cdot D\alpha)$$

(caso particolare della ben nota proprietà che, se esiste un potenziale, le sue derivate parziali, cambiate di segno, danno le componenti della forza generalizzata, o meglio *le azioni*, secondo la denominazione di Duhem).

Le quindici condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s} = \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

dicono che $a_{rs} = a_{sr}$ e quindi i trentasei coefficienti a_{rs} si riducono a ventun coefficienti distinti.