BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

CORRADINO MINEO

Sui massimi e minimi di corde normali a una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 194–195.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_194_0>

Sui massimi e minimi di corde normali a una superficie.

Nota di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Sunto. - *Sia* AB *una corda d'una superficie* S, *normale a* S *nel punto* A. *Se* AB *è massima o minima, o essa è normale a* S *anche nel punto* B *(corda binormale) o il punto* B *appartiene a una falda dell'evoluta di* S.

Il BONNET, ricercando gli estremi delle corde di un'ellisse, che siano normali all'ellisse stessa in uno dei suoi estremi, trovò che, quando il minimo assoluto è dato da quattro corde normali in punti che non sono vertici dell'ellisse, gli altri estremi delle anzidette corde si trovano sull'evoluta dell'ellisse (*Nouvelles Annales*, 1ª serie, vol. II, 1843, pp. 420-425).

Non so se sia stato notato che questo fatto è generale e si può estendere alle superficie. La dimostrazione è immediata. Supponiamo che, almeno nella regione considerata, l'equazione di S si possa mettere nella forma $z = f(x, y)$. Siano x, y, z le coordinate di A: p, q, r, s, t siano le mongiane calcolate nel punto A; p_1, q_1 siano i valori calcolati nel punto B di coordinate x_1, y_1, z_1. Si tratta di trovare gli estremi della funzione

$$\delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \tag{1}$$

con le condizioni

$$x - x_1 + p(z - z_1) = 0, \quad y - y_1 + q(z - z_1) = 0. \tag{2}$$

Escludendo il caso $1 + pp_1 + qq_1 = 0$ (corde normali e tangenti), le (2) definiscono x_1 e y_1 come funzioni di x e y, e le condizioni necessarie di estremo sono

$$[x - x_1 + (z - z_1)p_1]\frac{\partial x_1}{\partial x} + [y - y_1 + (z - z_1)q_1]\frac{\partial y_1}{\partial x} = 0,$$

$$[x - x_1 + (z - z_1)p_1]\frac{\partial x_1}{\partial y} + [y - y_1 + (z - z_1)q_1]\frac{\partial y_1}{\partial y} = 0.$$

O hanno luogo le relazioni

$$x - x_1 + (z - z_1)p_1 = 0, \quad y - y_1 + (z - z_1)q_1 = 0,$$

e la corda è allora binormale.

O è

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial y} & \dfrac{\partial y_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Ora si trova facilmente:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x} &= \frac{1 + p^2 + qq_1 + (z - z_1)[r(1 + qq_1) - spq_1]}{1 + pp_1 + qq_1}; \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} &= \frac{p(q - q_1) + (z - z_1)[s(1 + qq_1) - tpq_1]}{1 + pp_1 + qq_1}. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x} &= \frac{q(p - p_1) + (z - z_1)[s(1 + pp_1) - rqp_1]}{1 + pp_1 + qq_1}. \\ \frac{\partial y_1}{\partial y} &= \frac{1 + q^2 + pp_1 + (z - z_1)[t(1 + pp_1) - sqp_1]}{1 + pp_1 + qq_1}; \end{aligned}\right.$$

e la (3) diventa, dopo facili riduzioni e trasformazioni:

$$(rt - s^2)\delta^2 - \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]\delta + \\ + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0:$$

la quale prova appunto che δ è uno dei raggi principali di curvatura di S nel punto A.

Palermo, giugno 1929.