BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DARIO GRAFFI

Sul teorema di reciprocità della radiotelegrafia

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 8 (1929), n.4, p. 187–193.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_187_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_187_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

Sul teorema di reciprocità della radiotelegrafia.

Nota di D. GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Il teorema di reciprocità della radiotelegrafia viene esteso anche al caso in cui sul mezzo dove si trova il campo elettromagnetico agisca un campo magnetico. Vengono poi ricavate per via vettoriale ed esatta le applicazioni fatte dal SOMMERFELD di tale teorema e indicata qualche altra applicazione.*

1. Nell'articolo del SOMMERFELD sulla radiotelegrafia, posto nell'ultima edizione del RIEMANN-WEBER, è accennato ad un teorema di reciprocità che si può enunciare nel seguente modo:

Dati due campi elettromagnetici alternativi rappresentabili mediante i vettori immaginari ⁽¹⁾ $e^{i\omega t}\mathbf{E}_1$, $e^{i\omega t}\mathbf{H}_1$, $e^{i\omega t}\mathbf{E}_2$, $e^{i\omega t}\mathbf{H}_2$, vale la relazione:

$$(1) \quad \int_{\Sigma} \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2 \times n d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1 \times n d\Sigma,$$

essendo Σ una superficie tale che nel suo interno (o nel suo esterno) i vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sieno regolari e convergenti all'infinito e $\mathbf{n}$ la normale a Σ .

Da questo teorema il SOMMERFELD deduce alcune conseguenze che possono avere interesse pratico, pur dichiarando che tale teo-

⁽¹⁾ Con l'indicazione di vettore immaginario s'intende un vettore della forma $e^{i\omega t}(a + ib)$ che caratterizza il vettore $\cos \omega t a - \sin \omega t b$. Per una trattazione di tali vettori mediante il sistema BURALI-FORTI-MARCOLONGO vedi la I parte della mia Nota: *Sui problemi dell'ereditarietà lineare*, « Nuovo Cimento », 1928.

rema vale solo quando nel mezzo racchiuso da Σ non agisce alcun campo magnetico.

In questa Nota mostreremo la possibilità di estendere il teorema anche in un mezzo su cui agisca un campo magnetico; in secondo luogo ricaveremo per via strettamente vettoriale ed esatta le conseguenze della (1), correggendo così una svista del citato lavoro del SOMMERFELD.

2. Sia S un certo spazio chiuso dalla superficie Σ contenente un mezzo qualsiasi non magnetico. Le equazioni di MAXWELL per tale spazio sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= 4\pi u + \frac{dD}{dt} & \operatorname{rot} E &= - \frac{dH}{dt} \\ D &= \varepsilon E & u &= \sigma E \end{aligned}$$

dove D , H , E , u sono i vettori ⁽¹⁾ spostamento, campo elettrico, campo magnetico, densità di corrente, ε e σ la costante dielettrica e la conduttività che sono in generale omotetie o tutt'al più dilatazioni.

Facendo uso di vettori immaginari, le equazioni di MAXWELL diventano:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= (4\pi\sigma + i\omega\varepsilon)E \\ \operatorname{rot} E &= - i\omega H. \end{aligned}$$

Però se sul mezzo contenuto in S agisce un campo magnetico (d'intensità molto grande rispetto al campo elettromagnetico) e se il mezzo è un gas jonizzato, recenti ricerche ⁽²⁾ mostrano che fissata ω , la costante dielettrica deve essere una omografia vettoriale tale che la sua parte dilatazione rimanga invariata e la sua parte assiale cambi di segno all'inversione del campo magnetico. Lo stesso può dirsi per la conducibilità σ specialmente se il mezzo è solido e ciò per il fenomeno HALL. Si può allora fare l'ipotesi che le equazioni di MAXWELL siano:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \alpha E \\ \operatorname{rot} E &= - i\omega H \end{aligned}$$

dove α è una omografia che gode delle stesse proprietà enunciate per l'omografia costante dielettrica.

Con queste ipotesi è possibile estendere il teorema di reciprocità espresso dalla (1) ottenendo un teorema che ricorda quelli

(1) Questi vettori sono ora vettori ordinari.

(2) NICHOLS e SCHELLING, *Bell System Technical Journal*. Tomo 4, Aprile 1925; MESNY, *Les ondes électriques courtes*, pag. 42.

del VOLTERRA (1), della FREDÀ (2) e del LAZZARINO (3) sul fenomeno HALL. Il teorema in discorso è il seguente: Se E_1, H_1, E_2, H_2 sono due campi elettromagnetici nel mezzo contenuto in S , e se per il primo caso, il campo magnetico ha un senso, nell'altro senso opposto, vale ancora la (1). Infatti le equazioni di tale campo sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H_1 &= zE_1 & \operatorname{rot} H_2 &= kzE_2 \\ \operatorname{rot} E_1 &= -i\omega H_1 & \operatorname{rot} E_2 &= -i\omega H_2 \end{aligned}$$

dove kz al solito è l'omografia coniugata di z .

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(E_1 \wedge H_2) &= \operatorname{rot} E_1 \times H_2 - E_1 \times \operatorname{rot} H_2 = -i\omega H_1 \times H_2 - E_1 \times kzE_2 \\ &= H_1 \times -i\omega H_2 - zE_1 \times E_2 = H_1 \times \operatorname{rot} E_2 - \operatorname{rot} H_1 \times E_2 = \operatorname{div}(E_2 \wedge H_1). \end{aligned}$$

Si ha così:

$$\operatorname{div}(E_1 \wedge H_2) = \operatorname{div}(E_2 \wedge H_1).$$

Integrando questa espressione su tutto S e applicando il teorema della divergenza, si ottiene subito la (1), la quale vale evidentemente anche quando S si estende all'infinito purchè siano soddisfatte le solite condizioni di convergenza.

3. Passiamo ora a fare le applicazioni, già trattate dal SOMMERFELD al caso che il campo E_1 e H_1 sia prodotto da un dipolo elettrico (schematizzazione di un'antenna) posto in O_1 e che il campo E_2, H_2 sia prodotto da un dipolo posto in O_2 . Supponiamo poi che in un intorno di O_1 e O_2 (del resto comunque piccolo) si possa supporre il mezzo omogeneo e isotropo, condizione questa spesso verificata nella pratica. In questi intorni siano rispettivamente $\varepsilon_1, \sigma_1, \varepsilon_2, \sigma_2$ la costante dielettrica e la conducibilità. Indichiamo poi con Σ_1 e Σ_2 due sfere con centro in O_1 e O_2 e giacenti nell'intorno considerato. La (1) diviene allora:

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{\Sigma_1} (E_1 \wedge H_2) \times nd\Sigma_1 &- \int_{\Sigma_1} (E_2 \wedge H_1) \times nd\Sigma_1 = \\ &= \int_{\Sigma_2} (E_2 \wedge H_1) \times nd\Sigma_2 - \int_{\Sigma_2} (E_1 \wedge H_2) \times nd\Sigma_2. \end{aligned}$$

(1) VOLTERRA, « Rendiconti Accademia dei Lincei », 1° sem. 1915, pagine 220-289-378-533.

(2) FREDÀ, Idem, 2° sem. 1916, pagg. 28 e 60.

(3) LAZZARINO, Idem, 1° sem. 1917, pag. 596.

Poichè occorrerà poi passare al limite per Σ_1 e Σ_2 tendenti allo zero, si può mettere per E_1 e H_1 nelle vicinanze di O_1 il campo elettromagnetico generato direttamente da un dipolo posto nel mezzo di costante ε_1 e σ_1 , poichè nel passaggio al limite il campo dovuto all'induzione nei mezzi circostanti che si ammette rimanga finito non porta alcun contributo agli integrali considerati. Tale campo ha l'espressione (1):

$$\begin{aligned} H_1 &= (4\pi\sigma_1 + i\omega\varepsilon_1) \operatorname{rot} \Pi_1 = a_1 \operatorname{rot} \Pi_1, \quad a_1 = 4\pi\sigma_1 + i\omega\varepsilon_1 \\ E_1 &= -i\omega a_1 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi \\ \Pi_1 &= \frac{e^{ik_1 r}}{r} M_1 \end{aligned}$$

dove $k_1^2 = \varepsilon\omega^2 - 4\pi i\sigma\omega$ (2), M_1 è il momento del dipolo diviso per ε_1 e r la distanza del punto considerato da O_1 .

Calcoliamo il primo integrale della (2)

$$\int_{\Sigma_1} (E_1 \wedge H_2 \times n) d\Sigma_1 = -i\omega a_1 \int_{\Sigma_1} \Pi_1 \wedge H_2 \times n d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi \wedge H_2 \times n d\Sigma_1.$$

Il primo integrale del secondo membro tende a zero al tendere di Σ_1 a zero. Infatti se r è il raggio di Σ , $d\Sigma_1 = r^2 d\Omega$ (3), perciò si ha:

$$\int_{\Sigma_1} \Pi_1 \wedge H_2 \times n d\Sigma_2 = r e^{ik_1 r} \int_{\Omega} M_1 \wedge H_2 \times n d\Omega$$

e questo integrale tende a zero al tendere di r a zero.

Passiamo al calcolo del secondo integrale:

$$\int_{\Sigma_1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_1 \wedge H_2 \times n d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_1} \operatorname{grad} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} \times M_1 \right) \right) \wedge H_2 \times n d\Sigma_1.$$

Intanto osserviamo che poichè l'integrando (a parte $d\Sigma_1$) è infinito del 3° ordine al tendere di r a zero, non è lecito ritenere costante H_2 anche se $d\Sigma_1$ è molto piccolo e se H_2 è continuo. Infatti come si vedrà tale integrale non è nullo come afferma SOMMERFELD.

(1) RIEMANN-WEBER, loc. cit., pag. 429. Si noti però che qui vengono adoperate unità elettromagnetiche e che i è cambiato in $-i$.

(2) La radice di k_1 va presa con la parte immaginaria positiva.

(3) Essendo $d\Omega$ l'elemento della sfera di raggio 1.

Indicato allora con $H_2(O_1)$ il valore del campo magnetico in O_1 , si può porre:

$$H_2 = H_2(O_1) + \frac{dH_2}{dP}(P - O_1) + k$$

dove k è un vettore che tende a zero con ordine superiore a r al tendere allo zero di r . Allora si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \text{grad} \left(\text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \times M_1 \right) \wedge H_2 \times nd\Sigma_1 &= \int_{\Sigma_1} \frac{d \text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r}}{dP} M_1 \wedge H_2(O_1) \times nd\Sigma_1 \\ &- \int_{\Sigma_1} \frac{dH_2}{dP}(P - O_1) \wedge \text{grad} \left(\text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \times M_1 \right) \times nd\Sigma_1 \\ &+ \int_{\Sigma_1} \text{grad} \left(\text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \times M_1 \right) \times k \wedge nd\Sigma. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo per ragioni di simmetria, l'ultimo si annulla al tendere allo zero di r come è facile verificare: rimane il secondo integrale in cui si può sviluppare il gradiente e si ha:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \times M_1 \right) &= \text{grad} \left(\frac{d}{dr} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \text{grad } r \times M_1 \right) = \\ &= (\text{grad } r \times M_1) \frac{d^2 e^{ik_1 r}}{dr^2} \text{grad } r + \frac{d}{dr} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \frac{d \text{grad } r}{dP} M_1. \end{aligned}$$

Quando si va a sostituire questa espressione il termine $\text{grad } r$ si annulla. Si ottiene così per l'integrale considerato:

$$- \left(-\frac{1}{r^2} e^{ik_1 r} + \frac{ik_1}{r} e^{ik_1 r} \right) \frac{1}{r} \int_{\Sigma_1} \frac{dH_2}{dP}(P - O_1) \wedge M_1 \times nd\Sigma_1.$$

Passando al limite per $-r \rightarrow 0$, l'ultimo termine entro la parentesi non ha alcun effetto e il termine e^{ikr} tende a 1. Rimane perciò:

$$-\frac{1}{r^2} M_1 \times \int_{\Sigma_1} \frac{dH_2}{dP} \text{grad } r \wedge nd\Sigma_1.$$

Ora applicando un teorema del BURGATTI (1) si trova in definitiva

$$\frac{8\pi}{3} M_1 \times V \frac{dH_2}{dP} = \frac{4\pi}{3} M_1 \times \text{rot } H_2 = \frac{4\pi}{3} a_1 M_1 \times E_2(O_1).$$

Passiamo ora al calcolo del secondo integrale della (2)

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_1} (E_2 \wedge H_1) \times nd\Sigma_1 &= a_1 \int_{\Sigma_1} \text{rot} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} M_1 \right) \wedge E_2 \times nd\Sigma_1 = \\ &= \int_{\Sigma_1} \left(\text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \wedge M_1 \right) \wedge E_2 \times nd\Sigma_1. \end{aligned}$$

Ora posto $E_2 = E_2(O_1) + k$, dove $E_2(O_1)$ è il valore di E_2 nel punto O_1 è facile vedere che il termine contenente k tende a zero al tendere a zero di k_1 (2). Allora rimane:

$$- a_1 \left(-\frac{1}{r^2} e^{ik_1 r} + ik_1 \frac{e^{ik_1 r}}{r} \right) E_2 \wedge \int_{\Sigma_1} (\text{grad } r \wedge M_1) \times nd\Sigma_1,$$

il termine in $\frac{e^{ik_1 r}}{r}$ è al solito trascurabile. Rimane allora:

$$- a_1 \frac{1}{r^2} e^{ik_1 r} E_2 \times \int_{\Sigma_1} (M_1 \wedge n) \wedge nd\Sigma_1.$$

Ricordando il citato teorema del BURGATTI, ha al limite per r tendente a zero:

$$\frac{8}{3} \pi a_1 E_2 \times M_1.$$

Quindi si ha in definitiva per il primo membro della (2)

$$4\pi a_1 E_2 \times M_1.$$

(1) P. BURGATTI, *Valori medi di certe funzioni e loro relazioni con alcune grandezze fisiche fondamentali*. « Rendiconti Accademia delle Scienze di Bologna, 1928 ». I teoremi del BURGATTI di cui faremo uso sono i seguenti (con le nostre notazioni):

$$\frac{1}{r^2} \int_{\Sigma_1} \alpha n \wedge nd\Sigma_1 = -4\pi \frac{2}{3} V\alpha$$

in cui α è una omografia e $V\alpha$ il suo vettore, e

$$\frac{1}{r^2} \int_{\Sigma_1} (u \wedge n) \wedge nd\Sigma_1 = -4\pi \frac{2}{3} u(P).$$

(2) Nel seguito con E_2 indichiamo $E_2(O_1)$.

Al secondo membro della (2), ripetendo gli stessi ragionamenti e calcoli, e usando simboli analoghi si trova:

$$4\pi a_2 E_1 \times M_2.$$

Si ha così

$$a_1 E_2 \times M_1 = a_2 E_1 \times M_2,$$

che esprime lo stesso risultato del SOMMERFELD, il quale si può semplificare ammettendo alcune ipotesi (¹).

4. Le applicazioni del teorema trovato nel caso del campo magnetico si presentano per ora scarse, poichè il campo magnetico che interviene nel caso della propagazione di onde intorno al globo è il campo terrestre che non si può invertire. Anzi il teorema chiarisce la possibilità di trasmissione non invertibile già discussa dal ECKERSLEY (²).

Un'applicazione del teorema dimostrato ora può essere la seguente. Sia note con campo magnetico invertito, il campo elettromagnetico E_2, H_2 , generato da un dipolo posto in O_2 . Si abbia un qualsiasi sistema oscillante circondato da una superficie Σ_1 su cui sia noto il campo E_1, H_1 da esso generato. Allora circondato O_2 con una sfera Σ_2 si ha:

$$\int_{\Sigma_2} (E_1 \wedge H_2) - (E_2 \wedge H_1) \times nd\Sigma_2 = \int_{\Sigma_1} (E_1 \wedge H_2 - E_2 \wedge H_1) \times nd\Sigma_1.$$

Passando al limite per Σ_2 tendente a zero il primo membro diviene $4\pi a_1 E_1 \times M_1$. Poichè il secondo membro è noto si può trovare la componente di E_1 su M_1 e mediante un sistema di tre dipoli non complanari si può trovare E_1 in ogni punto dello spazio (³).

Bologna, Maggio 1929.

(¹) Anche i risultati del SOMMERFELD circa i dipoli magnetici si possono ottenere per la stessa via.

(²) « Nature », vol. 115.

(³) Al momento della correzione delle bozze trovo nel numero del 15 giugno 1929 del « Physikalische Berichte », che il sig. M. P. SVESHNIKOVA in un lavoro pubblicato in lingua russa si è accorto della svista del SOMMERFELD e ne ha dato la correzione da me trovata. Non ho potuto vedere la Memoria originale dello SVESHNIKOVA, ma dato i metodi vettoriali da me usati ritengo che la sua dimostrazione delle conseguenze del teorema di reciprocità sia diversa dalla mia.