Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Umberto Crudeli

Sui corpi di attrazione nulla

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 184–187.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_184_0>

Sui corpi di attrazione nulla.

Nota di UMBERTO CRUDELI (a Messina).

Sunto. - *L'Autore riprende brevemente una trattazione da lui svolta diversi anni or sono.*

Il MINEO, in una interessante Nota di questo « Bollettino » (15 aprile 1929), citando brevemente il mio modesto contributo sui corpi di attrazione nulla (comparso nei Rend. dei Lincei del 1912), si trova di necessità costretto ad esprimere il contributo stesso in una forma concisa, che potrebbe invitare ad accogliere (però a torto) come non completa la impostatura ad esso relativa da me allora istituita ([1]).

Invero [fermo restando il significato della funzione s, la quale risponde alle condizioni da me allora designate con (α)] la espressione $\Delta_2(us^2)$, per ogni scelta della funzione u soddisfacente alle condizioni ch'io ebbi a denotare con (β), definisce, entro lo spazio τ racchiuso dal contorno (regolare) del corpo, una densità del tipo cercato, al quale tipo spetta la generalità voluta. Viceversa, una densità che sia del tipo in discorso rappresenta entro τ una delle funzioni $\Delta_2(us^2)$ con s ed u rispettivamente soddisfacenti alle condizioni (α) e (β): nelle quali assumeremo senz'altro

$$g = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}\,,$$

dove (x, y, z) individua cartesianamente il generico punto di τ ed (x_1, y_1, z_1) un punto arbitrario esterno a τ, giovando omettere (come inutile) la prima delle formule che figurano nel comma II delle condizioni (β) contenute nel mio citato lavoro.

Tali condizioni, stante il loro carattere *non soltanto di sufficienza ma anche di necessarietà*, sono automaticamente legittime, dal momento che esistono distribuzioni con densità limitata ed integrabile, per le quali valga la nota formula del Poisson e sia nulla la corrispondente azione esterna.

Il proporsi poi di studiare le restrizioni che *di conseguenza* si viene ad imporre al prodotto us (cioè al prodotto della suddetta nostra u per la prima potenza di s) sarebbe titolo di ricerca ulteriore ma non necessaria, astraendo dal pregio che una tale ricerca potrebbe avere col facilitare la costruzione di corpi di attrazione nulla ([1]).

Le nostre condizioni possono essere presentate nel seguente modo.

Seguitando a denotare con τ lo spazio racchiuso dal contorno (regolare) del corpo, si ammetta che $s(x, y, z) = 0$ sia equazione

([1]) La frase « regolare nell'interno », la quale viene usata dal Mineo per la funzione u che figura nella nostra espressione della densità $\Delta_2(us^2)$, frase da connettersi col suo richiamo (4) in calce (a pag. 66), non si presenta come adatta nei riguardi della portata del mio contributo superiormente accennato, contributo che concerne distribuzioni con densità limitata ed integrabile, per le quali valga la ben nota formula del Poisson e sia nulla la corrispondente azione esterna.

([1]) Come potenza della s (nella espressione della densità) fu da me scelta la seconda per ritrovare, anche dal punto di vista formale, nel caso particolare del Pizzetti, le considerazioni di questo autore.

cartesiana del contorno in discorso. La funzione $s(x, y, z)$ viene supposta regolare nel campo τ, anche sul contorno, e diversa da zero nei punti interni. La funzione u va intesa poi tale che il prodotto us^2 (diciamolo f) goda delle seguenti proprietà:

1°) di avere il $\Delta_2 f$ limitato ed integrabile nel campo racchiuso dal contorno di τ e di soddisfare entro τ alla formula del POISSON

$$-4\pi\Delta_2 f = \Delta_2 \int_{(\tau)} \frac{\Delta_2 f}{r} d\tau,$$

2°) di rendere

$$\int_{(\tau)} \frac{\Delta_2 f}{r} d\tau = 0$$

ovunque nei punti non interni rispetto al contorno di τ.

L'espressione $\Delta_2(us^2)$ da noi definita serve, se non altro, a porgere in modo concreto la densità inerente a diversi corpi di attrazione nulla (in particolare nel caso del PIZZETTI), osservando che nella classe delle nostre u trovasi di certo ogni funzione limitata i cui valori (con riferimento all'interno del corpo) coincidano con quelli spettanti entro τ a funzione ovunque regolare in un campo che contenga τ nel suo interno.

Giova poi notare che, se V designa uno dei nostri potenziali (nulli ovunque nei punti non interni), ponendo

$$w = \frac{V}{s^2} \tag{1}$$

entro τ, si ottiene ivi nella w una funzione appartenente alla categoria delle u; ma giova pure notare (malgrado sia cosa evidente) che *non tutte le funzioni* u sono suscettibili [1] di eguagliare, nell'insieme dei punti che sono interni rispetto al contorno di τ, il rapporto ad s^2 di uno dei nostri potenziali: ad esempio la funzione definita entro τ mediante

$$\frac{V+k}{s^2},$$

dove k sia una costante diversa da zero e V abbia il precedente significato (il che mostra subito esservi anche funzioni *u non limitate*), sebbene tutti (e soli) i $\Delta_2(us^2)$ rappresentino entro τ densità del richiesto tipo.

[1] Perciò nella (1) conviene designare la $\frac{V}{s^2}$ con una lettera diversa dalla generica u.

La ricerca di un'eventuale concreta (suggestiva) conoscenza della classe *totale* delle funzioni u non si presenterebbe senz'altro agevole, specie ove si mirasse al raggiungimento di un enunciato scultorio come può dirsi giustamente (col MINEO) quello che ottenne il LAURICELLA nelle ricerche sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad un'assegnata azione esterna. Le quali però richiesero al LAURICELLA di restringere (a priori) la densità nel campo delle funzioni due volte derivabili in modo da ammettere il Δ_2, restrizione di certo non lieve dopo i risultati di H. PETRINI sulla teoria del potenziale.

Messina, giugno 1929 (anno VII).