BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GABRIELE MAMMANA

Sulla integrazione dell'equazione lineare omogenea del quinto ordine autoaggiunta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 180–184.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_180_0>

Sulla integrazione dell'equazione lineare omogenea del quinto ordine autoaggiunta.

Nota di GABRIELE MAMMANA (a Milano).

Sunto. - *L'Autore dimostra la possibilità di ricondurre razionalmente l'integrazione della menzionata equazione del quinto ordine lineare autoaggiunta, a quella di una equazione dello stesso tipo del quarto ordine. E propriamente, detti* u_1, u_2, u_3, u_4 *quattro integrali indipendenti di quest'ultima, verifica come un sistema fondamentale della assegnata equazione del quinto ordine, sia rappresentato da cinque dei numeri della matrice* $\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \end{Vmatrix}$, *il sesto risultando combinazione omogenea dei rimanenti.*

Nel fare lo studio delle espressioni differenziali lineari omogenee, per quel che ne riguarda la decomposizione in fattori simbolici, ho avuto occasione di notare una relazione notevole, fra le equazioni lineari del quarto ordine e quelle del quinto autoaggiunte, che qui brevemente espongo.

La menzionata relazione permette ricondurre la risoluzione della equazione del quinto ordine lineare, omogenea, autoaggiunta, alla risoluzione di una equazione dello stesso tipo (lineare omogenea autoaggiunta) del quarto ordine.

Ricordiamo che una equazione

$$L[u] \equiv z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + \ldots + p_n z = 0 \tag{1}$$

dicesi autoaggiunta se sussiste l'identità:

$$L[u] = z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (pz)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n p_n z.$$

La più generale equazione del quinto ordine, quindi, è della forma:

$$L[u] = z^{(V)} + 4pz''' + 6p'z'' + 2rz' + (r' - p''')z = 0 \tag{2}$$

le p ed r, essendo funzioni definite simultaneamente nell'intervallo (a, b), ivi continue con le derivate, e del resto qualsiansi.

Alla (2) possiamo dare la forma seguente (come si verifica subito):

$$(z'' + 2pz)''' + 2p(z'' + 2pz)' - (6p'' + 4p^2 - 2r)z' - (3p''' + 4pp' - r')z = 0.$$

Poniamo:

$$6p'' + 4p^2 - 2r = 4q.$$

segue:

$$3p''' - 4pp' - r' = 2q'.$$

Sostituendo avremo:

$$(3)\qquad (z'' + 2pz)''' + 2p(z'' + 2pz)' - 4qz' - 2qz = 0$$

ove p e q, come p ed r, possiamo pensarle qualsiansi.

Insieme alla (3) consideriamo l'altra del quarto ordine, che possiamo dire, a quella associata:

$$(4)\qquad u^{(\mathrm{IV})} + 2(pu')' + qu = 0.$$

Diciamo $u_1 : u_2 : u_3 : u_4 :$ un sistema integrale fondamentale della (4), e prendiamo a considerare i minori della matrice wronskiana formata con le u_i e le derivate delle u_i stesse:

$$(5)\qquad \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \end{matrix} \right\|.$$

Sussiste il Teorema:

I minori della matrice (5) *sono soluzioni della equazione* (3).

E infatti, indichiamo per semplicità con $\begin{vmatrix} u \\ u' \end{vmatrix} = \rho$ un generico minore del secondo ordine estratto dalla (5). Abbiamo successivamente

$$\rho = \begin{vmatrix} u \\ u' \end{vmatrix}; \quad \rho' = \begin{vmatrix} u \\ u'' \end{vmatrix}; \quad \rho'' = \begin{vmatrix} u \\ u''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix}$$

$$\rho''' = \begin{vmatrix} u \\ u^{(\mathrm{IV})} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} u' \\ u''' \end{vmatrix}.$$

e a causa della (4), cui soddisfano le u_i:

$$\rho''' = 2\begin{vmatrix} u' \\ u''' \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} u \\ (pu')' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} u' \\ u''' \end{vmatrix} - 2p\begin{vmatrix} u \\ u'' \end{vmatrix} - 2p'\begin{vmatrix} u \\ u' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} u' \\ u''' \end{vmatrix} - 2(p\rho)'$$

o anche:

$$(6)\qquad (\rho'' + 2p\rho)' = 2\begin{vmatrix} u' \\ u''' \end{vmatrix}$$

e derivando ancora:

$$(\rho'' + 2p\rho)'' = 2\begin{vmatrix} u'' \\ u''' \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} u' \\ u^{(\mathrm{IV})} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} u'' \\ u''' \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} u' \\ (pu')' \end{vmatrix} - 2q\begin{vmatrix} u' \\ u \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} u'' \\ u''' \end{vmatrix} - 4p\begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix} + 2q\rho$$

da cui:

$$(\rho'' + 2p\rho)'' - 2q\rho = 2\begin{vmatrix} u'' \\ u''' \end{vmatrix} - 4p\begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix};$$

deriviamo di nuovo:

$$(\rho'' + 2p\rho)''' - 2(q\rho)' = 2\begin{vmatrix} u'' \\ u^{(\mathrm{IV})} \end{vmatrix} - 4p'\begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix} - 4p\begin{vmatrix} u' \\ u''' \end{vmatrix};$$

e tenendo conto della (4) e della (6):

$$(\rho + 2p\rho)''' - 2(q\rho)' = -4\begin{vmatrix} u'' \\ (pu')' \end{vmatrix} - 2q\begin{vmatrix} u'' \\ u \end{vmatrix} - 4p'\begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix} - 2p(\rho'' + 2p\rho)' =$$

$$= + 4p'\begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix} + 2q\rho' - 4p'\begin{vmatrix} u' \\ u'' \end{vmatrix} - 2(\rho'' + 2p\rho)'$$

in definitiva:

$$(\rho'' + 2p\rho)''' + 2p(\rho'' + p\rho)' - 4q\rho' - 2q'\rho = 0.$$

Dal teorema ora dimostrato, si deduce un'altra conseguenza degna di nota. I minori contenuti nella (5), son sei; essi. d'altra parte, son tutti integrali della equazione del quinto ordine (3), ne consegue:

I minori della matrice wronskiana formata con quattro integrali indipendenti di una equazione del quarto ordine autoaggiunta, e con le derivate di questi integrali, sono linearmente dipendenti.

Sussiste, pertanto, fra essi, una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, una almeno. Ma non può sussisterne che una.

Per vedere la cosa nel modo più semplice cominciamo col fare le seguenti osservazioni:

Due orlati qualsiansi di un medesimo elemento della (5), costituiscono integrali indipendenti della (3). Per fissare le idee, supponiamo si tratti dei due primi orlati di u_1, e cioè:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \rho_{12}; \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix} = \rho_{13}.$$

Il determinante wronskiano del terzo ordine:

$$W_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix},$$

non è zero identicamente [1], nè zero identicamente è u_1: sia $(\alpha\beta)$ un tratto di (a, b) in cui u_1 e W_3 si conservano diversi da zero.

[1] Esso è integrale della aggiunta della (4), e, nel nostro caso quindi, un integrale della stessa (4). (Vedi: *Teoria decomposizione delle espressioni differenziali lineari* di GABRIELE MAMMANA, « Rend. Accademia Lincei », 1929).

Si ha in quel tratto per un noto teorema algebrico [1]:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1'' & u_3'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12}' & \rho_{13}' \end{vmatrix} = u_1^{3-2}\, W_3 = u_1\, W_3 .$$

Il wronskiano di ρ_{12} e ρ_{13}, non è dunque nullo identicamente in (a, b), e i due integrali della (3), ρ_{12} e ρ_{13} sono, pertanto, indipendenti.

E ora supponiamo che il sistema integrale fondamentale della (4) scelto, sia quello determinato dalle seguenti condizioni iniziali:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &u_1(a) = u_1'(a) = u_1''(a) = 0 \; u_1'''(a) = 1 \\ &u_2(a) = u_2'(a) = u_2'''(a) = 0 \; u_2''(a) = 1 \\ &u_3(a) = u_3''(a) = u_3'''(a) = 0 \; u_3'(a) = 1 \\ &u_4'(a) = u_4''(a) = u_4'''(a) = 0 \; u_4(a) = 1. \end{aligned}$$

Diciamo ρ_{ij} il minore estratto della (5), formato con le colonne i e j e proponiamoci la ricerca dei coefficienti della relazione, o delle relazioni, che legano i ρ_{ij}, quando gli integrali u_i siano quelli determinati dalle (7).

Una tale relazione dovrà avere la forma:

$$(8)\qquad K_1\rho_{12} + K_2\rho_{13} + K_3\rho_{14} + K_4\rho_{23} + K_5\rho_{24} + K_6\rho_{34} \equiv 0$$

le K_i essendo costanti.

La (8) deve essere soddisfatta identicamente in (a, b) con le sue derivate prima, seconda, terza etc. Ma in a, per la particolare scelta delle u_i, si ha, come è facile verificare:

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = 0 ; \quad \rho_{34} = -1 .$$

Segue: Per ogni relazione del tipo (8), deve aversi: $K_6 = 0$.

Derivando la (8), e osservando che in a:

$$\rho_{12}' = \rho_{13}' = \rho_{14}' = \rho_{23}' = 0 ; \quad \rho_{24}' = -1$$

si deduce:

$$K_5 = 0.$$

Derivando ulteriormente si trova, quando si osservi che in a:

$$\rho_{12}'' = \rho_{13}'' = 0 , \quad \rho_{14}'' = \rho_{23}'' = -1 : K_3 + K_4 = 0.$$

[1] Vedi ad esempio CIPOLLA, *Analisi Algebrica. Teoria determinanti.*

Tutte le relazioni lineari omogenee che legano i minori ρ_{ij}, devono, dunque, essere del seguente tipo:

$$K_1\rho_{12} + K_2\rho_{13} = H(\rho_{14} - \rho_{23}). \tag{9}$$

Non può H riescire nulla, che altrimenti verrebbe a sussistere una relazione lineare fra ρ_{12} e ρ_{13}, cosa che abbiamo dimostrata impossibile.

Da una relazione eventuale del tipo della (9) con K_1 e K_2 entrambe nulle, seguirebbe: $\rho_{14} \equiv \rho_{23}$; e non sarebbe possibile avere una seconda relazione per i ρ_{ij}, chè questa ultima verrebbe ad esprimere una dipendenza lineare fra ρ_{12} e ρ_{13}; infine, ove sussistessero due relazioni indipendenti del tipo (9), con K_1 e K_2 non tutte e due nulle, potremmo, da esse, dedurne una terza fra ρ_{12} e ρ_{13}, ciò che non può accadere.

Possiamo enunciare il:

TEOREMA: *L'integrazione della più generale equazione del quinto ordine lineare omogenea autoaggiunta, può ricondursi sempre, razionalmente, all'integrazione di una equazione lineare omogenea autoaggiunta del quarto ordine.*

I minori del secondo ordine della matrice wronskiana formata con quattro integrali indipendenti (della equazione del quarto ordine alla cui integrazione si riconduce quella del quinto menzionata) e con le derivate di essi, costituiscono altrettante soluzioni di quest'ultima equazione.

Fra i detti minori sussiste sempre una e una sola relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, cinque di essi, quindi, formano sempre sistema integrale fondamentale per la equazione del quinto ordine in parola.

Milano, 3 giugno 1929.