Mauro Picone

Aggiunta alla Nota: “Sul problema di Neumann nel piano„

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.4, p. 177–179.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_4_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

PICCOLE NOTE

Aggiunta alla Nota: “Sul problema di Neumann nel piano„.

Nota di MAURO PICONE (a Napoli).

Sunto. - *Si ritorna sull'analisi svolta nella Nota richiamata nel titolo della presente per completarla in un punto essenziale.*

Devo ritornare sulla trattazione del problema di NEUMANN nel piano, data nella Nota richiamata nel titolo della presente, apparsa nel fascicolo del Giugno scorso di questo « Bollettino », per completare l'analisi là svolta in un punto essenziale, ciò che fornisce altresì una dimostrazione del teorema d'esistenza nelle ipotesi generali nelle quali mi sono messo. Riprendo le notazioni e la numerazione delle formole là usate.

Problema interno. — Detta v la funzione armonica coniugata in D della w, si deve porre

$$
(3') \qquad v \begin{cases} (\text{su } C) = g(s) = \gamma - \displaystyle\int_0^s f(\sigma)\,d\sigma + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_k(\sigma)\,d\sigma, \\ (\text{su } C_h) = g_h(s) = \gamma + \gamma_h - \displaystyle\int_0^s f_h(\sigma)\,d\sigma + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_{kh}(\sigma)\,d\sigma, \end{cases}
$$

dove γ, γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sono costanti arbitrarie (¹).

In virtù delle (1) e (2) risulta $g(0) = g(l)$, $g_h(0) = g_h(l_h)$, cioè le (3'), in ogni punto della frontiera di D, assegnano alla v un valore che riesce funzione continua del punto. Dico che si può

(¹) Nelle (3) della Nota precedente ho posto $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$, ritenendo arbitrarie le origini degli archi su ciascuna delle curve C, C_1, $C_2, \ldots, C_m$, che qui invece intendo di fissare.

disporre delle costanti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ in guisa che la v risulti dotata in D di funzione coniugata, che cioè si abbia

$$\int_{C_h} \frac{dv}{dn} ds = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m). \tag{3''}$$

Designi invero v_0 la funzione armonica in D che verifica le (3') per $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$ e U_h $(h = 1, 2, \ldots, m)$ la funzione armonica in D che verifica le condizioni:

$$U_h \,(\text{su } C) = 0, \quad U_h \,(\text{su } C_k) \begin{cases} = 0, & \text{se } k \neq h \\ = 1, & \text{se } k = h \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

si avrà

$$v = v_0 + \gamma + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \ldots + \gamma_m U_m .$$

Posto

$$a_{hk} = \int_{C_h} \frac{dU_k}{dn} ds.$$

le equazioni (3'') si traducono nel seguente sistema di m equazioni lineari nelle m incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{hk}\gamma_k = -\int_{C_h} \frac{dv_0}{dn} ds \qquad (h = 1, 2, \ldots, m). \tag{3'''}$$

Il determinante $[a_{hk}]$ è diverso da zero. Ed invero, per ogni sistema di valori $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ delle γ, verificanti le (3''') ridotte omogenee, esiste una funzione armonica W coniugata in D della

$$U = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \ldots + \gamma_m U_m ,$$

e per tale funzione si ha

$$\frac{dW}{dn} = \frac{dU}{ds} = 0 \ (\text{su } FD);$$

ne segue che W è costante in D. Tale risulterà pure la U e poichè $U (\text{su } C) = 0$, si avrà

$$U \,(\text{su } C_h) = \gamma_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Le equazioni (3''') sono dunque compatibili e determinano in modo unico i valori delle $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ che le soddisfano. Presi tali valori per le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ e fissato a piacere un punto P_0 interno a D, per la soluzione u del posto problema interno di NEUMANN si ha:

$$u(P) = c + \sum_{k=1}^{m} \frac{\log \overline{P_k P}}{2\pi} \int_{C_k} \frac{du}{dn} ds + (\Gamma)\int_{P_0}^{P} \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \right), \tag{4}$$

ove c è una costante arbitraria e l una curva regolare interna a D congiungente il punto P_0 col punto P variabile nell'interno di D.

Problema esterno. — Detta v la funzione armonica coniugata in D della w, essa riuscirà convergente all'infinito e si avrà:

$$
(3^{\text{IV}}) \qquad v \begin{cases} (\text{su } C_1) = \gamma_1 - \int_0^s f_1(\sigma) d\sigma + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_{k1}(\sigma) d\sigma, \\ (\text{su } C_h) = \gamma_1 + \gamma_h - \int_0^s f_h(\sigma) + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_{kh}(\sigma) d\sigma, \qquad (h = 2, 3, \ldots, m), \end{cases}
$$

dove $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sono costanti arbitrarie. In virtù del secondo gruppo delle (2), le equazioni (3^{IV}) assegnano alla v, in ogni punto della frontiera di D, un valore che risulta funzione continua del punto. Dico che si può disporre delle costanti $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ in guisa che la v riesca dotata in D di funzione coniugata convergente all'infinito, che si abbiano cioè le ($3''$). Ed invero, poichè:

$$
\int_{FD} \frac{dv}{dn} ds = \sum_{h=1}^{m} \int_{C_h} \frac{dv}{dn} ds = 0.
$$

basta soddisfare $m - 1$ delle equazioni ($3''$) e per esempio quelle di indice $h = 2, 3, \ldots, m$. Designi v_0 la funzione armonica in D e convergente all'infinito che verifica le (3^{IV}) per $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$ e U_h $(h = 2, 3, \ldots, m)$ la funzione del pari armonica in D e convergente all'infinito verificante le condizioni

$$
U_h \, (\text{su } C_k) \begin{cases} = 0, \text{ se } k \neq h, \\ = 1, \text{ se } k = h, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),
$$

si avrà

$$
v = v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 U_2 + \gamma_3 U_3 + \ldots + \gamma_m U_m,
$$

e le equazioni ($3''$), per $h = 2, 3, \ldots, m$, si traducono in un sistema di $m - 1$ equazioni lineari nelle $m - 1$ incognite $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$, il cui determinante dei coefficienti è diverso da zero, come si vede ripetendo il ragionamento già fatto per il problema interno. Determinate le $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$, la (4) fornisce la soluzione del posto problema esterno di NEUMANN.

Napoli, 15 luglio 1929 (VII).