Bollettino
Unione Matematica
Italiana

UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.3, p. 164–165.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_164_0>

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

37. La disuguaglianza

$$\int_T u^2 dT \leq \frac{(\text{diametro di } T)^2}{4n} \int_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right] dT,$$

(nella ipotesi che $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sia finita e continua, con le derivate parziali del 1° ordine, nel dominio T, limitato e misurabile, dello spazio S_n, e che tale funzione sia sempre nulla sulla frontiera di T), è una conseguenza immediata dell'altra

$$\int_T u^2 dT \leq \frac{1}{n}\left(\frac{D}{\pi}\right)^2 \int_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right] dT$$

($D =$ diametro di T), la quale è, a sua volta, una conseguenza della disuguaglianza

$$\int_T u^2 dT \leq \left(\frac{D}{\pi}\right)^2 \int_T \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 dT.$$

Detta T_{x_r} la parte di T che si trova su una retta generica parallela all'asse delle x_r, la disuguaglianza ora scritta segue immediatamente dalla

(1) $$\int_{T_{x_r}} u^2 dx_r \leq \left(\frac{D}{\pi}\right)^2 \int_{T_{x_r}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 dx_r.$$

Ma si ha (se (a, b) è un segmento di T_{x_r} avente gli estremi sulla frontiera di T)

(2) $$\int_a^b u^2 dx_r \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 dx_r$$

e perciò

$$\int_a^b u^2 dx_r \leq \left(\frac{D}{\pi}\right)^2 \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 dx_r,$$

donde la (1).

Della (2) si conoscono varie dimostrazioni. La più elementare (e più rapida) di tutte è quella data dal prof. M. PICONE in *Esercitazioni Matematiche*, del « Circolo Matematico di Catania », 1922, pag. 288 (1). Essa consiste nell'osservare che è, da una parte,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x_r} - \frac{\pi u}{b-a} \operatorname{cotg} \frac{\pi(x_r - a)}{b-a}\right)^2 dx_r \geq 0$$

e, dall'altra (sviluppando il quadrato),

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x_r} - \frac{\pi u}{b-a} \operatorname{cotg} \frac{\pi(x_r - a)}{b-a}\right)^2 dx_r = \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 dx_r - \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b u^2 dx_r .$$

l. t.

(1) Vedi anche questo « Bollettino », 1923, pag. 99.