Sunti di lavori italiani

* Lavori di: A. Colucci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.3, p. 148–150.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_148_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

A. Colucci: *Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti* (in corso di stampa nei « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze » di Torino).

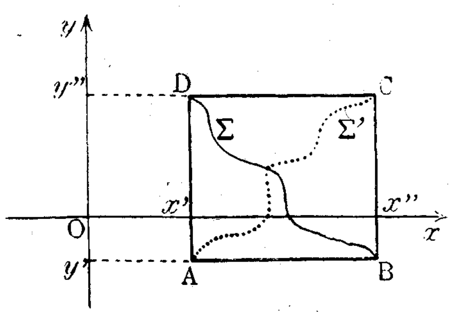
Data l'equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti

$$(1) \qquad b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y),$$

dove $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ sono funzioni assegnate nel rettangolo R (v. figura) definito dalle limitazioni:

$$x' \leq x \leq x'' \quad y' \leq y \leq y''.$$

l'A. si pone e risolve completamente, sotto opportune ipotesi per



i coefficienti della (1) e per $f(x, y)$, il seguente *problema dei valori iniziali*:

Data una successione continua di valori su di una curva semplice Σ(Σ′) *di estremi* (x′, y″), (x″, y′), [(x′ y′), (x″, y″)] *totalmente contenuta in* R, *costruire in tale rettangolo la soluzione* u(x, y) *della* (1) *che su* Σ(Σ′) *prende i valori prescritti.*

Tale problema è stato originato e deve il suo interesse al seguente notevole teorema dovuto al prof. PICONE [1]: *se in* R *le due funzioni* $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ *non prendono mai valori di segno opposto (dello stesso segno), ed una di esse è ivi sempre non nulla, una soluzione dell'equazione* (1) *riesce completamente determinata in* R *dai valori che essa assume su di una curva semplice* $\Sigma(\Sigma')$, *tutta contenuta in* R *e determinata ai punti* $D(x', y'')$, $B(x'', y')$ $[A(x', y')$, $C(x'', y'')]$. Questo teorema rappresenta, infatti, un primo risultato nella trattazione, *in grande,* della integrazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

Se, per fissare le idee, si considera il caso delle due funzioni $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ non di segno opposto in tutti i punti del rettangolo R, la curva Σ atta ad individuare una soluzione dell'equazione (1), quando si diano su di essa i valori della soluzione stessa, deve congiungere i vertici D e B del rettangolo. Ebbene, nel citato lavoro del PICONE è dimostrato, con esempi, che se invece la curva Σ congiunge gli altri due vertici A e C, *vi sono in generale infinite soluzioni dell'equazione* (1) *che assumono sulla curva valori prescritti, laddove tali valori non sempre si possono assegnare arbitrariamente, inquantochè i valori sopra un certo pezzo della curva possono talora determinare completamente quelli sul pezzo rimanente.*

Eppure una simile curva Σ può non essere nè una *curva caratteristica* dell'equazione, nè avere alcun tratto in comune con una tale curva; ed inoltre può indifferentemente scriversene l'equazione risoluta tanto rispetto alla x come rispetto alla y.

Pertanto, se si prendessero senz'altro i risultati classici della teoria generale delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine — secondo i quali ad una soluzione di una tale equazione, risolubile rispetto ad una delle derivate in tutto il rettangolo R, si possono prescrivere arbitrariamente i valori sopra ogni curva che non sia una caratteristica — si sarebbe indotti a vedere nelle suddette conclusioni un paradosso.

Il paradosso non può rimuoversi se non considerando che la costruzione della soluzione dell'equazione, verificante le assegnate condizioni iniziali, è nel teorema di PICONE, richiesta in *tutto* un assegnato rettangolo R, e non soltanto lungo un intorno della curva

[1] *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del second'ordine*, di prossima pubblicazione negli « Annali di Matematica pura ed applicata ». Questa Memoria è stata insignita del premio Tenore dell'Accademia Pontaniana di Napoli, nella seduta del 10 giugno 1928.

portante i dati, come risulta dalla precisa applicazione dei classici risultati.

Lo studio in grande dell' integrazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine offre dunque un effettivo interesse per la presunzione — ben fondata, dopo quanto si legge nel citato lavoro di Picone, — che debbano presentarsi in esso studio fatti nuovi e del tutto insospettati.

Napoli, 18 maggio 1929 (VII).