Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Angelo Tonolo

Una proprietà caratteristica delle superficie ipersferiche dello spazio S_4

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.3, p. 132–137.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_132_0>

Una proprietà caratteristica delle superficie ipersferiche dello spazio S_4.

Nota di ANGELO TONOLO (a Padova).

Sunto. — *Introdotte le nozioni di rotazioni relative ad un parametro normale del σ_2 di una V_2, e di parametro normale di proporzionalità, l'A. dimostra che sono condizioni necessarie e sufficienti per le superficie dichiarate nel titolo, quelle di possedere un parametro normale di proporzionalità il quale ha nulle le rotazioni.*

Scopo della presente Nota è quello di esporre una proprietà caratteristica delle superficie V_2 che sono situate sopra una ipersfera dello spazio S_4. La trattazione è condotta con l'agile algoritmo funzionale [1].

1. Sia

$$f = f(t,\ u_1,\ u_2) \tag{1}$$

l'equazione di una superficie generica V_2 dello spazio S_4, e

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{r,s}\, du_r\, du_s \tag{2}$$

la forma che dà il quadrato del suo elemento lineare. Indichiamo con f_r, f_{rs}, $f_{r,s}$ (r, $s = 1$, 2) rispettivamente le derivate prime, le derivate seconde ordinarie e quelle covarianti della funzione f rapporto alle variabili u_1, u_2. Denotiamo con X un parametro normale del σ_2' di V_2 ortogonale a V_2, e facciamo le posizioni:

$$x_{r,s} = \int_g X f_{r,s}\, dt. \tag{3}$$

Vediamo così che ad ogni parametro normale X si può associare un sistema doppio $x_{r,s}$ covariante simmetrico. Colleghiamo al parametro X un secondo parametro normale Y del σ_2 di V_2 ortogonale ad X e alla V_2, e poniamo:

$$\delta_r = \int_g Y X_r\, dt, \tag{4}$$

dove X_r denota la derivata prima di X rapporto alla variabile u_r. Chiameremo δ_r le *rotazioni* relative al parametro normale X.

DEFINIZIONE: Diremo che X è un *parametro normale di proporzionalità*, se il sistema $x_{r,s}$ ad esso associato è proporzionale al sistema $a_{r,s}$.

TEOREMA: *Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie generica* V_2 *di* S_4 *sia situata sopra una ipersfera sono:*

1) *Che la* V_2 *ammetta un parametro normale di proporzionalità.*

2) *Che le rotazioni relative a questo parametro siano nulle.*

Le condizioni 1) e 2) sono necessarie. Consideriamo uno spazio S_4 che contenga l'origine O dello spazio hilbertiano, e in esso l'iper-

[1] Una esposizione completa di questo elegante algoritmo, con varie interessanti applicazioni, si trova nella Memoria del prof. VITALI: *Geometria nello spazio hilbertiano.* [« Atti del R. Istituto Veneto ». T. LXXXVII, Parte seconda (1928)], pp. 349-428.

sfera di centro O e raggio uno. Possiamo scrivere così l'equazione della ipersfera:

(5) $$\psi = \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \varphi_2 \operatorname{sen} \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \varphi_3 \operatorname{sen} \vartheta_1 \operatorname{sen} \vartheta_2 \cos \vartheta_3 + \\ + \varphi_4 \operatorname{sen} \vartheta_1 \operatorname{sen} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_3,$$

dove le $\varphi_i = \varphi_i(t)$ sono quattro parametri normali ortogonali fra loro. Essendo

(6) $$\int_g \psi^2 dt = 1,$$

si ottiene, derivando rispetto alla variabile ϑ_ρ,

(7) $$\int_g \psi \psi_\rho dt = 0 \qquad (\rho = 1, 2, 3).$$

In forza delle (7) concludiamo essere ψ un parametro di direzione ortogonale all'ipersfera (5); anzi, a causa della (6), un parametro normale. Una superficie V_2 di S_4 situata sull'ipersfera (5) si otterrà assumendo

(8) $$\vartheta_\rho = \vartheta_\rho(u_1, u_2),$$

dove i secondi membri delle (8) indicano funzioni (arbitrarie) delle variabili u_1, u_2. L'equazione di V_2 sarà pertanto:

(9) $$f = \varphi_1 \cos \vartheta_1(u_1, u_2) + \varphi_2 \operatorname{sen} \vartheta_1(u_1, u_2) \cos \vartheta_2(u_1, u_2) + \\ + \varphi_3 \operatorname{sen} \vartheta_1(u_1, u_2) \operatorname{sen} \vartheta_2(u_1, u_2) \cos \vartheta_3(u_1, u_2) + \\ + \varphi_4 \operatorname{sen} \vartheta_1(u_1, u_2) \operatorname{sen} \vartheta_2(u_1, u_2) \operatorname{sen} \vartheta_3(u_1, u_2).$$

Il parametro $\psi = f$, essendo normale all'ipersfera, sarà eziandio normale alla V_2 data dalla (9). Perciò:

(10) $$\int_g f f_r dt = 0 \qquad (r = 1, 2).$$

In seguito questo parametro f lo indicheremo con X. Io dico che esso è un parametro normale di proporzionalità.

Siano

(11) $$a_{r,s} = \int_g f_r f_s dt,$$

i coefficienti della forma che dà il ds^2 di V_2.

Si ha:

(12) $$x_{r,s} = \int_g X f_{r,s} dt.$$

Teniamo presente che le differenze $f_{r,s} - f_{rs}$ sono combinazioni lineari delle derivate prime f_r; perciò, poichè X è normale a V_2, le (12) equivalgono alle seguenti:

(13) $$x_{r,s} = \int_g X f_{r,s}\, dt = \int_g f f_{rs}\, dt.$$

Dalle (10) si trae, per derivazione rispetto alla variabile u_s,

(14) $$\int_g f f_{rs}\, dt + \int_g f_r f_s\, dt = 0.$$

Quindi, in virtù delle (11), (12), si ricava:

$$x_{r,s} = -a_{r,s},$$

e perciò il parametro X è un parametro normale di proporzionalità.

Le rotazioni ad esso relative sono:

$$\delta_r = \int_g Y X_r\, dt = \int_g Y f_r\, dt.$$

E poichè Y è normale a V_2, si ha:

$$\int_g Y f_r\, dt = 0.$$

Quindi le rotazioni δ_r relative ad X sono nulle.

Le condizioni 1) e 2) sono sufficienti. Sia V_2 una superficie generica di S_4 di equazione

$$f = f(t, u_1, u_2),$$

per la quale siano soddisfatte le condizioni 1) e 2).

Con referenza al parametro normale X di proporzionalità, si ha:

$$x_{r,s} = \lambda a_{r,s},$$

cioè:

$$\int_g X f_{r,s}\, dt = \lambda \int_g f_r f_s\, dt,$$

od anche, per un' osservazione già fatta,

(15) $$\int_g X f_{rs}\, dt = \lambda \int_g f_r f_s\, dt.$$

Poichè

$$\int_g X f_s\, dt = 0.$$

si trae, per derivazione rapporto alla variabile u_r,

$$\int_g X_r f_s \, dt + \int_g X f_{rs} \, dt = 0.$$

Le (15) dànno perciò:

$$(16) \qquad \int_g f_s [X_r + \lambda f_r] \, dt = 0.$$

Le (16) ci dicono che i parametri di direzione $X_r + \lambda f_r$ sono perpendicolari a V_2. Dalla

$$\int_g X^2 \, dt = 1,$$

si ottiene, per derivazione,

$$(17) \qquad \int_g X X_r \, dt = 0.$$

Inoltre, essendo nulle le rotazioni rapporto al parametro di proporzionalità X, valgono le identità:

$$(18) \qquad \int_g Y X_r \, dt = 0.$$

Allora, in forza delle (17), (18), si ottiene:

$$\int_g X[X_r + \lambda f_r] \, dt = 0, \qquad \int_g Y[X_r + \lambda f_r] \, dt = 0:$$

queste identità, unite alle (16), ci dicono che i parametri $X_r + \lambda f_r$ sono normali a tutte le direzioni dell'S_4. Quindi essi devono essere nulli. Si ha pertanto:

$$(19) \qquad X_r + \lambda f_r = 0.$$

Deriviamo rispetto alla variabile u_s si trova:

$$X_{rs} + \lambda f_{rs} + \lambda_s f_r = 0.$$

Scambiamo r con s, e sottraghiamo: si ricava:

$$(20) \qquad \lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0.$$

Moltiplichiamo la (20) una volta per f_1, una seconda volta per f_2, e poi integriamo. Si ha:

$$(21) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\lambda_2 - a_{1,2}\lambda_1 = 0, \\ a_{1,2}\lambda_2 - a_{2,2}\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

E dalle (21), per essere diverso da zero il determinante dei coefficienti $a_{r,s}$, si conclude l'annullarsi delle derivate λ_1, λ_2.

Il fattore λ è quindi una costante.

Integriamo allora le (19): si ottiene:

$$X = -\lambda[f(t) - f_0(t)],$$

ove $f_0(t)$ indica una funzione arbitraria della variabile t. Ma X è parametro normale, quindi

$$\int_g X^2 \, dt = 1.$$

Ne consegue che deve essere

$$\int_g [f(t) - f_0(t)]^2 \, dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La considerata superficie V_2 di S_4 giace pertanto sopra un'ipersfera di raggio $\frac{1}{\lambda}$.

Padova, 1 Maggio 1928.