Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Sui problema di Neumann nel piano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.3, p. 121–129.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

PICCOLE NOTE

Sul problema di Neumann nel piano.

Nota di Mauro Picone (a Napoli).

Sunto. - *Si riconducono i problemi interno ed esterno di* Neumann *nel piano a quelli di* Dirichlet, *liberando il dominio a cui quei problemi si riferiscono da qualsiasi ipotesi restrittiva inerente alla sua connessione. Si notano infine alcune proprietà integrali delle funzioni armoniche in due o più variabili.*

Mi è venuto fatto di osservare in lezione che i problemi interno ed esterno di Neumann nel piano relativi ad un dominio regolare D possono sempre ricondursi, *senza fare alcuna ipotesi inerente alla connessione del dominio,* ai problemi di Dirichlet, mediante una leggera modificazione del noto procedimento del Dini [1], il quale procedimento, a quanto mi consta, si suole applicare — in tutta generalità — limitatamente al caso che il dominio sia limitato e semplicemente connesso [2].

Mi permetto di dedicare a tale osservazione le poche righe che seguono.

[1] Dini, *Sulla integrazione della equazione* $\Delta^2 u = 0$. [« Annali di Matematica pura ed applicata », tomo V della serie II (1871-1873, pp. 305-345)].

[2] Cfr., per esempio, il recentissimo articolo di K. Löwner (pp. 530-569) nel libro di von Mises: *Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* (Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1925). Si legga specialmente dalla riga 19ma alla 24ma di pag. 543. Il Dini stesso, nella Memoria citata (pp. 327-329), considera il problema di Neumann anche per dominii (limitati) pluriconnessi, ed è estremamente interessante rileggere ora le pagine che vi dedicò, nelle quali si può vedere come il grande analista avrebbe desiderato togliere ogni restrizione alla validità del suo procedimento, inerente alla connessione del dominio, mentre doveva sfuggirgli il modesto artificio che glielo avrebbe immediatamente consentito.

1. **Problema interno.** — Siano: C il contorno esterno e C_1, $C_2, \dots C_m$ i contorni interni del dominio regolare e limitato D del piano (x, y), s l'arco sulla frontiera di D e n la normale a tale frontiera volta verso l'interno di D, $l, l_1, l_2, \dots, l_m$ le lunghezze di C, C_1, $C_2, \dots, C_m$, P il punto variabile nel piano (x, y), $P_1, P_2, \dots, P_m$, m punti arbitrariamente fissati rispettivamente interni alle curve $C_1, C_2, \dots, C_m$. Alla funzione u continua in D con le sue derivate parziali del primo ordine, armonica nell'interno di D, siano, nel problema, prescritte le condizioni al contorno:

$$\frac{du}{dn}\begin{cases} (\text{su } C) = f(s) \\ (\text{su } C_h) = f_h(s) \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \dots, m);$$

posto

$$c = \int_0^l f(s)ds, \qquad c_h = \int_0^{l_h} f_h(s)ds.$$

deve risultare

$$c + c_1 + c_2 + \dots + c_m = 0. \tag{1}$$

Si ponga

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\log\overline{P_kP}}{dn}\begin{cases} (\text{su } C) = \rho_k(s) \\ (\text{su } C_h) = \rho_{kh}(s) \end{cases} \qquad (k, h = 1, 2, \dots, m),$$

si avrà

$$\int_0^l \rho_k(s)ds = -1, \qquad \int_0^{l_h} \rho_{kh}(s)ds \begin{cases} = 0, & \text{se } h \neq k, \\ = 1, & \text{se } h = k. \end{cases} \tag{2}$$

Se ora consideriamo la funzione armonica

$$w(P) = u(P) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{2\pi} \log \overline{P_kP},$$

poichè, per ogni curva regolare Γ semplice e chiusa, interna a D, riesce (in virtù delle (2))

$$\int_{+\Gamma}\left(-\frac{\partial w}{\partial y}dx + \frac{\partial w}{\partial x}dy\right) = -\int_{\Gamma}\frac{dw}{dn}ds = \sum_h \int_{C_h}\frac{dw}{dn}ds =$$

$$= \sum_h c_h - \sum_h \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^{l_h} \rho_{kh}(s)ds = 0,$$

prendendo l'indice h tutti e soli i valori per i quali la curva C_h è interna a Γ, possiamo affermare (¹) che la w è dotata di funzione coniugata v, continua in D con le sue derivate parziali del primo ordine, armonica nell' interno di D. Si ha:

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{dw}{dn} \begin{cases} (\text{su } C) = -f(s) + \sum_{k=1}^{m} c_k \rho_k(s), \\ (\text{su } C_h) = -f_h(s) + \sum_{k=1}^{m} c_k \rho_{kh}(s), \end{cases}$$

e quindi si può porre:

$$(3) \qquad v \begin{cases} (\text{su } C) = g(s) = -\int_0^s f(\sigma)d\sigma + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_k(\sigma)d\sigma, \\ (\text{su } C_h) = g_h(s) = -\int_0^s f_h(\sigma)d\sigma + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_{kh}(\sigma)d\sigma. \end{cases}$$

In virtù delle (1) e (2) risulta $g(0) = g(l)$, $g_h(0) = g_h(l_h)$, cioè le (3), in ogni punto della frontiera di D, assegnano alla v un valore che riesce funzione continua del punto. È perciò risolubile per essa il problema di DIRICHLET. Ottenuta la v, fissiamo a piacere un punto P_0 interno a D; si ha per la soluzione u del posto problema di NEUMANN:

$$(4) \qquad u(P) = c + \sum_{k=1}^{m} \frac{\log \overline{P_k P}}{2\pi} \int_{C_k} \frac{du}{dn} ds + (\Gamma)\int_{P_0}^{P} \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \right).$$

ove c è una costante arbitraria e Γ una curva regolare interna a D congiungente il punto P_0 col punto P variabile nell' interno di D.

L' applicazione del metodo esposto al caso che il dominio D sia una corona circolare conduce immediatamente alla formola del DINI (²) liberandola anche dalla condizione che i dati al contorno

(¹) Per una completa dimostrazione di ciò cfr. la trattazione del problema dell' integrazione delle forme differenziali lineari che travasi ai numeri 122 e 124 delle mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*, vol. I, [« Circolo matematico di Catania », Catania (R. Università), 1923].

(²) Data a pag. 322 della Memoria citata. In questa Memoria, a pag. 329, il DINI osserva pure che può ottenersi la formola risolutiva del problema di NEUMANN per la corona circolare riconducendo il problema a quello di DIRICHLET, ma nell' ipotesi, da noi ora dimostrata superflua, che i dati al contorno abbiano nullo l' integrale esteso a ciascuna delle due circonferenze limitanti la corona.

torno siano tali funzioni della comune anomalia dei punti delle circonferenze limitanti la corona da ammettere uno sviluppo in serie di FOURIER uniformemente convergente [1].

2. **Problema esterno.** — Il dominio D sia ora illimitato e consista nella totalltà dei punti non interni alle m curve regolari semplici e chiuse C_1. $C_2, \ldots, C_m$ l' una esterna all' altra. Alla funzione u vengono allora prescritte, nel problema, le condizioni al contorno

$$\frac{du}{dn}(\text{su } C_h) = f_h(s) \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

e quella di essere convergente all' infinito. Deve risultare

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 0 \ (^2),$$

onde segue

$$\lim_{P \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{2\pi} \log \overline{P_k P} = 0.$$

La funzione armonica

$$w(P) = u(P) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{2\pi} \log \overline{P_k P},$$

riesce perciò pur essa convergente all' infinito e dotata [3] di funzione coniugata v del pari convergente all' infinito. In virtù del secondo gruppo delle (2), le equazioni

$$v(\text{su } C_h) = -\int_0^s f_h(\sigma) d\sigma + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^s \rho_{kh}(\sigma) d\sigma,$$

assegnano alla v, in ogni punto della frontiera di D, un valore che risulta funzione continua del punto. È perciò risolubile per

(1) Ciò è già stato conseguito, per altra via, anche nella tesi di laurea, di prossima pubblicazione, della dottoressa MARIA PACIFICO, nella quale tesi vengono rielaborate tutte le formole risolutive dei problemi (nel piano) considerati dal DINI nella Memoria citata, svincolandole da analoghe ipotesi restrittive.

(2) Cfr. il teorema IV del n. 10 dei miei *Appunti d'Analisi superiore*, di prossima pubblicazione (Editore Stolfi, Napoli).

(3) PICONE, *Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana* [« Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei », vol. VIII della serie 6ª (1928), pp. 651-657].

essa il problema di DIRICHLET. Ottenuta la v, la (4) fornisce la soluzione u del posto problema esterno di NEUMANN.

3. Teoremi della teoria delle funzioni di variabile complessa. — Vogliamo ora anzitutto esplicitamente enunciare il seguente teorema contenuto in ciò che precede.

I. *Sia* D *un dominio del piano* (x, y), *regolare, internamente connesso, di contorni interni* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ *e sia* u(P) *una funzione reale, continua in* D *con le sue derivate parziali del primo ordine, armonica nell'interno di* D. *Comunque si prendano i punti* $P_1, P_2, \ldots, P_m$, *rispettivamente interni alle curve* $C_1, C_2, \ldots, C_m$, *la funzione*

$$u(P) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\log \overline{P_k P}}{2\pi} \int_{C_k} \frac{du}{dn}\, ds,$$

riesce sempre la parte reale di una funzione della variabile complessa $z = x + iy$, *continua in* D *e olomorfa dell'interno di* D.

Ma sussiste anche un teorema analogo al precedente che può in certo modo riguardarsi come ottenuto da questo facendo tendere le curve $C_1, C_2, \ldots, C_m$ rispettivamente ai punti $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Per una precisa enunciazione del teorema parmi che convenga ricorrere alla nozione di *indici* che vado a ricordare, introdotta in recenti mie esposizioni della teoria delle singolarità isolate delle funzioni armoniche. Se I è un intorno circolare di un punto O e se la funzione $u(P)$ è armonica in $I - O$, la media dei valori che la funzione assume sopra ogni circonferenza di centro in O e di raggio r, contenuta in I, ha l'espressione

$$\alpha' + \alpha'' \log r \text{ [1]},$$

α' e α'' mantenendosi costanti al variare di r. Ebbene io chiamo tale media e le costanti α' e α'', rispettivamente il *residuo,* il *primo indice* ed il *secondo indice* della funzione armonica $u(P)$ nel punto singolare isolato O. Per ogni curva regolare C semplice e chiusa, contenuta in I e avente il punto O nell'interno si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C} \frac{du}{dn}\, ds = \alpha''.$$

[1] PICONE, *Sulle singolarità delle funzioni armoniche.* [« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. III della serie 6ª (1926), pp. 655-660].

Ciò ricordato è ben facile dimostrare il teorema:

II. *Siano: D un dominio regolare semplicemente connesso,* P_1, $P_2, \ldots, P_m$, m *punti interni a D,* u(P) *una funzione reale, continua in ogni punto di* $D - P_1 - P_2 - \ldots - P_m$ *con le sue derivate parziali del primo ordine, armonica in* $D - FD - P_1 - P_2 - \ldots - P_m$ (1). *Detto* α_k *il secondo indice della* u *nel punto singolare* P_k, *la funzione*

$$u(P) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \log \overline{P_k P},$$

riesce la parte reale di una funzione della variabile complessa $z = x + iy$, *continua in* $D - P_1 - P_2 - \ldots - P_m$ *e olomorfa in* $D - FD - P_1 - P_2 - \ldots - P_m$.

Ne segue il corollario:

III. *Se I è un intorno circolare di un punto* $O(x_0, y_0)$ *e se la funzione* u(P) *è armonica in* $I - O$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia la parte reale di una funzione* f(z) *della variabile complessa* $z = x + iy$, *olomorfa in* $I - O$, *è che la* u *abbia nullo il suo secondo indice in* O, *cioè che la media dei valori di* u *sopra una circonferenza di centro in* O *e contenuta in I si mantenga costante al variare della circonferenza. Posto* $f(z) = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ *e detti* α *e* β *i residui rispettivamente di* u *e* v *in* O, *se*

$$\sum_{k}^{-\infty, +\infty} (a_k + ib_k)(z - z_0)^k,$$

è lo sviluppo di LAURENT *della* f(z) *in* $I - O$, *riesce*

$$\alpha + i\beta = a_0 + ib_0.$$

4. Alcune proprietà integrali delle funzioni armoniche in due o più variabili. — Non è male notare esplicitamente il seguente teorema che immediatamente discende dal teorema II e che stabilisce talune proprietà integrali delle funzioni armoniche in due variabili che mi sono state utili in ricerche (non ancora pubblicate) relative al comportamento di quelle funzioni nelle vicinanze di un loro punto singolare isolato.

IV. *Introduciamo un sistema di coordinate polari* ρ *e* θ *col polo in* O. *Se I è un intorno circolare di* O *e se la funzione* $u(\rho, \theta)$ *è armonica in* $I - O$, *per ogni numero intiero* n *e comunque si pren-*

(1) Con. FD designo la frontiera di D.

dano le costanti A *e* B, *si ha:*

$$(5)\qquad \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)(A \cos n\theta + B \operatorname{sen} n\theta) d\theta \begin{aligned} &= C_{-0} \log \rho + C_0, \text{ per } n = 0. \\ &= C_{-n}\rho^{-n} + C_n\rho^n, \text{ per } n > 0, \end{aligned}$$

le C_{-n} *e* C_n *mantenendosi costanti al variare di* ρ *per valori minori del raggio* r *di* I.

Sia invero α il secondo indice della u in O e diciamo $v(\rho, \theta)$ la funzione armonica in $I - O$, coniugata alla $u(\rho, \theta) - \alpha \log \rho$, vale in $I - O$ lo sviluppo di LAURENT:

$$u(\rho, \theta) - \alpha \log \rho + iv(\rho, \theta) = \sum_k^{-\infty, +\infty} (a_k + ib_k)(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)\rho^k,$$

e quindi

$$u(\rho, \theta) = \alpha \log \rho + \sum_k^{-\infty, +\infty} (a_k \cos k\theta - b_k \operatorname{sen} k\theta)\rho^k,$$

donde, comunque si fissi $\rho < r$, moltiplicando per $\cos n\theta$ o per $\operatorname{sen} n\theta$ ed integrando fra O e 2π, si traggono le relazioni

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) d\theta = a_0 + \alpha \log \rho,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \end{Bmatrix} d\theta \begin{Bmatrix} = a_{-n}\rho^{-n} + a_n\rho^n \\ = b_{-n}\rho^{-n} - b_n\rho^n \end{Bmatrix}, \quad \text{per } n > 0.$$

e quindi le (5).

Ma a tali relazioni si può direttamente pervenire senza ricorrere alla teoria delle funzioni di variabile complessa, con un elegante procedimento che conduce ad una proposizione più generale della IV e che si può anche applicare alle funzioni armoniche in quante si vogliano variabili per ottenere analoghe proprietà integrali parimente utili nello studio del comportamento di quelle funzioni nelle vicinanze di un loro punto singolare. Si consideri invero che se $u(\rho, \theta)$ e $v(\rho, \theta)$ sono due funzioni armoniche nell'interno I di una corona circolare di centro in O e di raggi interno r' ed esterno $r''(r' \geqq 0)$, il seguente integrale

$$(6)\qquad \int_0^{2\pi} [u_\rho(\rho, \theta)v(\rho, \theta) - u(\rho, \theta)v_\rho(\rho, \theta)]\rho d\theta,$$

si mantiene costante al variare di ρ nell'intervallo aperto (r', r'').

Si ponga $T_n(\theta) = A \cos n\theta + B \operatorname{sen} n\theta$, $v(\rho, \theta) = \dfrac{T_n(\theta)}{\rho^n}$, si avrà dunque, designando C una costante,

$$\int_0^{2\pi} \left[u_\rho(\rho, \theta) \frac{T_n(\theta)}{\rho^{n-1}} + \frac{n}{\rho^n} u(\rho, \theta) T_n(\theta) \right] d\theta = C, \quad r' < \rho < r'',$$

e quindi posto

$$U(\rho) = \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) T_n(\theta) d\theta,$$

si trova per $U(\rho)$ l'equazione differenziale

$$U'(\rho) + \frac{n}{\rho} U(\rho) = C\rho^{n-1},$$

dalla quale, integrando, seguono precisamente le (5).

Porremo fine a questo scritto, limitandoci ad enunciare e a dimostrare per le funzioni armoniche in tre variabili, le proprietà integrali analoghe a quelle espresse dalle (5). Sia O un punto dello spazio (x, y, z), diremo $\omega(O)$ la superficie sferica di centro in O e di raggio *uno*, Q un punto variabile su $\omega(O)$, $d\omega_Q$ l'elemento d'area di ω nel punto Q, $Y_n(Q)$ la funzione sferica d'ordine n, e, per ogni punto P dello spazio, ρ la sua distanza da O, Q il punto d'incontro del raggio OP con la superficie $\omega(O)$. Sussiste il teorema:

V. *Se* $\boldsymbol{I}$ *è l'interno di uno strato sferico di centro in* O *e di raggi interno* r' *ed esterno* r'' (r' $\geq$ 0) *e se la funzione* u(ρ, Q) *è armonica in* $\boldsymbol{I}$, *per ogni numero intiero* n, *positivo o nullo, e comunque si prendano le* 2n + 1 *costanti da cui (linearmente ed omogeneamente) dipende la funzione sferica* Y$_n$(Q), *si ha:*

$$\iint_{\omega(O)} u(\rho, Q) Y_n(Q) d\omega_Q = \frac{C_{-n}}{\rho^{n+1}} + C_n \rho^n, \tag{7}$$

le C_{-n} *e* C_n *mantenendosi costanti al variare di* ρ *nell'intervallo aperto* (r', r'').

Si ha invero, designando C una costante, per $r' < \rho < r''$,

$$\iint_{\omega(O)} \left[u_\rho(\rho, Q) \frac{Y_n(Q)}{\rho^{n+1}} - u(\rho, Q) \frac{\partial}{\partial\rho} \frac{Y_n(Q)}{\rho^{n+1}} \right] \rho^2 d\omega_Q = C,$$

e quindi, posto

$$U(\rho) = \iint_{\omega(O)} u(\rho, Q) Y_n(Q) d\omega_Q,$$

ne segue per $U(\rho)$ l' equazione differenziale

$$U'(\rho) + \frac{n+1}{\rho} U(\rho) = C\rho^{n-1},$$

donde, integrando, la (7).

Napoli, 30 aprile 1929 (anno VII).