Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giulio Platone

Funzioni di Bessel di composizione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.2, p. 87–92.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Funzioni di Bessel di composizione.

Nota di GIULIO PLATONE (a Cagliari).

Sunto. - *L'A., ottenute le funzioni di* BESSEL come una particolare funzione dell'Esponenziale di composizione, *costruisce da quelle, mediante una trasformazione del* VOLTERRA, *i nuovi funzionali* $\overset{*}{\mathrm{I}}_n$ *ed* $\overset{**}{\mathrm{I}}_n$ *che chiama* funzioni di BESSEL di composizione di prima e di seconda specie *e trova parecchie equazioni integrali ed integro-differenziali alle quali questi soddisfano. Esamina il caso in cui le* $\overset{*}{\mathrm{I}}_n$ *appartengono al gruppo del* ciclo chiuso.

1. **Passaggio dalla funzione esponenziale di composizione alle funzioni di Bessel.** — Eseguiamo nella funzione esponenziale

$$\xi_0 e^{-z\xi} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \xi_0 \xi^k \tag{1}$$

una sostituzione del prof. VOLTERRA, cioè sostituiamo ξ_0 con $F_0(xy)$ e ξ con $F(xy)$, dove $F_0(xy)$ e $F(xy)$ sono due funzioni finite, continue e permutabili tra di loro e consideriamo i prodotti delle F come *operazioni di composizione di prima specie.* Si otterrà un *funzionale misto* di F_0 e F e del parametro z (serie di composizione)

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!} z^k \overset{*}{F}_0 \overset{*}{F}{}^k \tag{2}$$

il quale, una volta fissate le funzioni F_0 e F, è una *trascendente intera* del parametro z e considerato come funzione delle variabili x, y è permutabile con le F [1].

Se prendiamo $F_0 = 2^n \overset{*}{1}{}^{n+1}$, $n > 0$ e $F = 1$ il funzionale (2) diventa una funzione permutabile con l'unità e quindi funzione della differenza $y - x$ [2], che rappresento con $V(z; y-x)$.

[1] Vedi V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, pag. 139, § 10.
[2] Vedi V. VOLTERRA e J. PERES, *Leçons sur la composition*, pag. 9, § 9.

Sarà quindi

$$V(z;\, y-x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k 2^n}{\Gamma(k+1)} z^k \overset{*}{1}{}^{n+k+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k 2^n z^k (y-x)^{n+k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}.$$

Se ora scegliamo x e y in modo che sia

$$y - x = \frac{z}{2^2}$$

la $V(z;\, y-x)$ si trasforma nella serie

$$\sum \frac{(-1)^k z^{n+2k}}{2^{n+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \tag{3}$$

che non è altro che la funzione $J_n(z)$ di BESSEL, la quale, per quanto abbiamo detto sopra, è convergente in tutto il piano z.

2. **Funzioni di Bessel di composizione di prima specie.** — Sostituiamo nella (3) z con $zF(xy)$ dove F è una funzione arbitraria, finita e continua, e consideriamo i prodotti di F come *prodotti e potenze di composizione di prima specie*. Otterremo un *funzionale misto* di F e di z

$$\sum \frac{(-1)^k z^{n+2k} \overset{*}{F}{}^{n+2k}}{2^{n+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \tag{4}$$

il quale è una *funzione olomorfa* rispetto al parametro z ed è permutabila con $F(xy)$. Chiameremo questo funzionale, *funzioni di Bessel di composizione di prima specie*, e lo rappresenteremo con $\overset{*}{J}_n(z : xy)$ (¹).

Proponiamoci di dimostrare alcune delle principali proprietà di queste nuove serie di composizione $\overset{*}{J}_n$.

È noto, che le trascendenti $J_n(z)$ soddisfano l'equazione differenziale di BESSEL

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) f = 0 \tag{5}$$

e sono legate dalle relazioni ricorrenti

$$\frac{2n}{z} J_n = J_{n-1} + J_{n+1} \tag{6}$$

$$2\frac{dJ_n}{dz} = J_{n-1} - J_{n+1} \tag{7}$$

(¹) Se $n = 0$, sarà $\overset{*}{J}_0 = \overset{*}{1}{}^0 - \dfrac{z^2 \overset{*}{F}{}^2}{2^2} + \dfrac{z^4 \overset{*}{F}{}^4}{2^4 2!2!} - \ldots -$: $\overset{*}{J}_0$ contiene l'espressione simbolica $\overset{*}{1}{}^0$.

che combinate tra loro danno l'altra relazione

$$\frac{dJ_n}{dz} = J_{n-1} - \frac{n}{z} J_{n+1} \tag{8}$$

da cui segue

$$2^2 J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$$

e per induzione

$$2^s J_n^{(s)} = J_{n-s} - sJ_{n-s+2} + \binom{s}{2} J_{n-s+4} + \ldots (-1)^s J_{n+s} = \sum_0^s (-1)^k \binom{s}{k} J_{n-s+2k}. \tag{9}$$

Se ora sostituiamo nella (5) z con $z\xi$ e poniamo $\mathfrak{J} = \xi_0 f$ si ha, osservando che $\frac{d^{(k)}f}{dz} = \frac{1}{\xi_0 \xi^k} \frac{d^k \mathfrak{J}}{dz^k}$, l'equazione differenziale

$$z^2 \frac{d\mathfrak{J}}{dz^2} + z \frac{d\mathfrak{J}}{dz} + (z^2\xi^2 - n^2)\mathfrak{J} = 0 \tag{10}$$

che è verificata dalla trascendente intera

$$\xi_0 J_n(z\xi) = \sum \frac{(-1)^k z^{n+2k} \xi_0 \xi^k}{2^{n+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \tag{11}$$

che rappresenteremo con $I_n(z;\xi_0,\xi)$ o più semplicemente con I_n.

Sostituendo ora nella (10) ξ con $F(xy)$ e ξ_0 con $F_0(xy)$, dove F e F_0 sono finite, continue e permutabili tra di loro, e considerando i prodotti delle F come *operazioni di composizione di prima specie,* si otterrà l'equazione *integro-differenziale a limiti variabili*

$$z^2 \frac{d^2 \overset{*}{\mathfrak{J}}}{dz^2} + z \frac{d\overset{*}{\mathfrak{J}}}{dz} + (z^2 \overset{*}{\mathfrak{J}}{}^2 - n^2 \overset{*}{1}{}^0)\overset{*}{\mathfrak{J}} \tag{12}$$

la quale, per il teorema di VOLTERRA (1) è verificata dalla funzione di composizione $I_n(z;\overset{*}{F}_0,\overset{*}{F}) = \overset{*}{F}_0 \overset{*}{J}_n(z\overset{*}{F})$ che rappresentiamo con $\overset{*}{I}_n$ e che chiameremo *funzione di Bessel di composizione generalizzata* (2).

(1) Vedi V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions des lignes*, pagg. 153 e 198; oppure V. VOLTERRA, *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali*. « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XX, 2° semestre, fasc. 3.

(2) Se $n \neq 0$ si può prendere $\xi_0 = 1$ e considerare solo i prodotti di F come operazioni di composizione. In tale caso la funzione di composizione $\overset{*}{I}_n$, non conterrebbe l'espressione simbolica $\overset{*}{1}{}^0$ (vedi nota (1) alla pagina precedente), sarebbe permutabile con F e coinciderebbe con $\overset{*}{J}_n$. In altre parole, siccome la J_0 non soddisfa alle condizioni richieste per applicare il teorema di VOLTERRA, introduciamo la $I_n = \xi_0 J_n$ la quale per $n = 0$ si trova nelle condizioni su accennate.

Sarà quindi

$$\overset{*}{I}_n = \sum \frac{(-1)^k z^{n+2k} \overset{*}{F}_0 \overset{*}{F}^{n+2k}}{2^{n+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \tag{13}$$

che considerata come funzione del parametro z è *olomorfa*, e come funzione di xy è *permutabile* con F.

Inoltre siccome le funzioni J_n soddisfano le relazioni *alle differenze e differenziali* (6), (7), (8), (9) le funzioni I_n saranno legate dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} 2nI_n &= z\xi I_{n-1} + z\xi I_{n+1} \\ 2\frac{\partial I_n}{\partial z} &= \xi I_{n-1} - \xi I_{n+1} \\ z\frac{\partial I_n}{\partial z} &= z\xi I_{n-1} - nI_n \\ 2^s \frac{\partial^s I_n}{\partial z^s} &= \sum_0^s (-1)^k \binom{s}{k} \xi I_{n-s+2k} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

e quindi le funzioni di composizione $\overset{*}{I}_n$; $\overset{*}{I}_{n-1} = I_{n-1}(z;\, xy)$; $\overset{*}{I}_{n+1} = I_{n+1}(z;\, xy)$, per il già citato *teorema di Volterra* soddisfano le equazioni *integrali e integro-differenziali a limiti variabili ad esse correlative*

$$\left\{\begin{aligned} 2n\overset{*}{I}_n &= z\overset{*}{F}(\overset{*}{I}_{n-1} + \overset{*}{I}_{n+1}) \\ 2\frac{\partial \overset{*}{I}_n}{\partial z_n} &= \overset{*}{F}(\overset{*}{I}_{n-1} - \overset{*}{I}_{n+1}) \\ z\frac{\partial \overset{*}{I}_n}{\partial z_n} &= z\overset{*}{F}\overset{*}{I}_{n-1} - n\overset{*}{I}_n \\ 2^n \frac{\partial^s \overset{*}{I}}{\partial z^s} &= \sum_0^s (-1)^k \binom{s}{k} \overset{*}{F}{}^s \overset{*}{I}_{n-s+2k} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

che possono anche scriversi

$$\left\{\begin{aligned} 2nI_n(z:\, xy) &= z\int_x^y F(x\xi)[I_{n-1}(z;\, \xi y) + I_{n-1}(z;\, \xi y)]d\xi \\ 2\frac{\partial I_n(z;\, xy)}{\partial z} &= z\int_x^y F(x\xi)[I_{n-1}(z;\, xy) - I_{n+1}(z;\, \xi y)]d\xi \\ z\frac{\partial I_n(z;\, xy)}{\partial z} &= z\int_x^y F(x\xi)[I_{n-1}(z;\, \xi y)d\xi - I_n(z;\, xy)] \\ 2^n \frac{\partial^s I_n(z;\, xy)}{\partial z^s} &= \sum_0^s {}_k (-1)^k \binom{s}{k} \int_x^y \overset{*}{F}{}^s(x\xi) I_{n-s+2k}(z;\, \xi y)d\xi. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Se in particolare prendiamo $F = F_0 = 1$; la (12) diventa

$$z^2 \frac{\partial^2 \vartheta(z; y-x)}{\partial z^2} + z \frac{\partial \vartheta(z; y-x)}{\partial z} + z^2 \int_x^y (y-x)\vartheta(z; y-\xi) d\xi - n^2 \vartheta(z; y-x) = 0$$

e la soluzione

$$I_n(z; y-x) = \sum \frac{(-1)^k (y-x)^{n+k} z^{n+2k}}{2^{n+2k} \Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}.$$

Le $I_n(z; y-x)$ saranno permutabili con l'unità e quindi appartengono al gruppo del *ciclo chiuso*. Le (16) pigliano la forma

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} 2n I_n(z; y-x) &= z \int_x^y [I_{n-1}(z; y-\xi) + I_{n+1}(z; y-\xi)] d\xi \\ 2 \frac{\partial I_n(z; y-x)}{\partial z} &= \int_x^y [I_{n-1}(z; y-\xi) - I_{n+1}(z; y-\xi)] d\xi \\ z \frac{\partial I_n(z; y-x)}{\partial z} &= z \int_x^y I_{n-1}(z; y-\xi) d\xi - n I_n(z; y-x) \\ 2^n \frac{\partial^s I_n(z; y-x)}{\partial z^s} &= \sum_0^s {}_k \frac{(-1)^k \binom{s}{k}}{(s-1)!} \int_x^y (\xi - x)^{s-1} I_n(z; y-\xi) d\xi. \end{aligned} \right.$$

3. **Funzioni di Bessel di composizione di seconda specie.** — Nel numero precedente abbiamo considerato i prodotti delle $F(xy)$ come operazioni di composizione di prima specie. Oltre alle equazioni integrali e integro-differenziali a limiti variabili così ottenute ed a cui soddisfano le $\overset{*}{I}_n$, si hanno anche quelle che si ottengono considerando i prodotti delle F come *operazioni di composizione di seconda specie*.

Così, siccome dell'equazione differenziale (10) si conosce la soluzione (11) avremo sempre per il teorema di VOLTERRA che la funzione *di composizione di seconda specie* $\overset{**}{F_0} I_n(z\overset{**}{F})$ (n numero naturale) che corrisponde alla (11) e che rappresentiamo con $\overset{**}{I}_n$

$$\overset{**}{I}_n = \sum \frac{(-1)^k z^{n+2k} \overset{**}{F_0} \overset{**}{F}{}^{n+2k}}{2^{n+2k} k!} =$$

$$= \sum \frac{(-1)^n z^{n+2k}}{2^{n+2k} k!} \underbrace{\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b}_{n+2k} F_0(x\xi_1) F(\xi_1, \xi_2) \dots F(\xi_{n+2k}, y) d\xi_1 \dots d\xi_{n+2k}$$

è soluzione dell'equazione *integro-differenziale a limiti costanti*, corrispondente alla (10)

$$z^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{J}(z\overset{**}{F})}{\partial z^2} + z \frac{\partial \mathfrak{J}(z\overset{**}{F})}{\partial z} + (z^2 \overset{**}{F}{}^2 \overset{**}{\mathfrak{J}}(z\overset{**}{F}) - n^2 \mathfrak{J}(z\overset{**}{F}). \tag{18}$$

I funzionali misti $\overset{**}{I}_n$, una volta fissate F_0 e F, saranno *trascendenti intere* [1] del parametro z e soddisferanno le *equazioni integrali e integro-differenziali a limiti costanti*

$$\left\{\begin{aligned} 2n\overset{**}{I}_n &= z\overset{**}{F}(\overset{**}{I}_{n-1} + \overset{**}{I}_{n+1}) \\ 2\,\frac{\partial \overset{**}{I}_n}{\partial z} &= \overset{**}{F}(\overset{**}{I}_{n-1} - \overset{**}{I}_{n+1}) \\ z\,\frac{\partial \overset{**}{I}_n}{\partial z} &= z\overset{**}{F}\,\overset{**}{I}_{n-1} - n\overset{**}{I}_n \\ 2^s\,\frac{\partial^s \overset{**}{I}_n}{\partial z^s} &= \sum_0^s{}_k\,(-1)^s \binom{s}{k} \overset{**}{F}{}^s\,\overset{**}{I}_{n-s+2k} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

correlative alle (8). La sola differenza tra le (12) e (15) del n.° 2 e le (18) e (19) del n.° 3 è che nelle (12) e (15) i limiti d'integrazioni sono le stesse variabili x, y che compariscono nelle funzioni $F_0(xy)$ e $F(xy)$; mentre chè nelle (18) e (19) i limiti sono costanti e quindi indipendenti dalle variabili x e y.

Cagliari, 28 febbraio 1929.

(1) Le $\overset{**}{I}_n$ una volta fissate F_0 e F sono trascendenti intere perchè sono tali anche le (11), cioè le $I_n(z; \xi_0, \xi)$.