
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

P. CALAPSO

**Inviluppi di sfere sulle cui focali si
corrispondono le linee di curvatura
e le linee asintotiche**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 8 (1929), n.2, p. 85–87.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_85_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_85_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

**Inviluppi di sfere sulle cui focali
si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche.**

Nota di PASQUALE CALAPSO (a Messina) ⁽¹⁾.

Nella teoria delle trasformazioni delle superficie per inviluppi di sfere, presenta speciale interesse il caso in cui sulle due focali dell'inviluppo si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche.

L'attenzione sul soggetto mi è stata richiamata dal FUBINI, del che vivamente ringrazio il collega.

Per la formazione di un siffatto inviluppo di sfere, si presenta spontaneo il seguente procedimento:

Sia (G) una congruenza ciclica e (Σ) , (Σ') due superficie ortogonali ai circoli del sistema ciclico associato a (G) ; le due superficie (Σ) e (Σ') sono focali di un inviluppo di sfere, che si corrispondono per linee di curvatura. Se si vuole che su (Σ) e (Σ') si corrispondano anche le asintotiche, si perviene ad una condizione nuova per la (G) .

Ma tale procedimento, per quanto spontaneo, non si presta alla discussione del problema: per il che ho trasformato la questione premettendo un teorema sulle congruenze cicliche in generale, non mai osservato, prima, che può enunciarsi nel modo seguente:

Sia (A) una sfera dipendente da due parametri; P e P' i punti in cui la sfera tocca il suo inviluppo, e si supponga che sulle superficie (Σ) e (Σ') descritte dai punti P e P' si corrispondano le linee di curvatura. Si sa che i piani tangenti alla sfera nei punti P e P' si tagliano secondo una retta che genera una congruenza ciclica (G) .

⁽¹⁾ Non ci è giunto il Sunto della presente Nota, che era stato richiesto all'A..

(N. della R.).

Siano R ed S i fuochi del raggio G e si costruiscano le sfere coi centri in R ed S passanti per P ; queste due sfere (R) , (S) risultano ortogonali alla sfera (A) ed ortogonali tra loro.

Sia (A') una sfera ortogonale alla sfera (A) , (R) , (S) e tale che sulla superficie, luogo del centro A' le linee corrispondenti alle linee di curvatura di (Σ) formino una rete armonica a (G) .

Sia infine (A'') la sfera ortogonale alle sfere (A) , (R) , (S) , (A') : se

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{Y} \cdot \frac{1}{Z}$$

sono i raggi delle sfere (A') , (A'') , (A) , le funzioni X , Y , Z sono le coordinate della direzione di una retta che genera una nuova congruenza ciclica (G_1) .

Ho chiamato (G_1) la congruenza aggiunta di (G) , perchè l'equazione di LAPLACE a cui soddisfano X , Y , Z è l'aggiunta di quella a cui soddisfano le quantità analoghe relative a (G) .

Ma la circostanza che merita essere rilevata è che una qualunque congruenza ciclica è sempre interpretabile come congruenza aggiunta per un conveniente inviluppo di sfere con focali corrispondenti per linee di curvatura.

Dopo ciò, ritornando alla questione che interessa il presente problema, la condizione affinché sulle superficie (Σ) e (Σ') si corrispondano le linee asintotiche, si traduce in una condizione caratteristica per la congruenza aggiunta (G_1) ; e cioè:

Siano X , Y , Z soluzioni di un'equazione di Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$$

colla relazione

$$(2) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + \xi^2 + \eta^2 = 0$$

(per il che X , Y , Z sono i parametri direttori di una retta che genera una congruenza ciclica): si pensi questa congruenza ciclica (G_1) come aggiunta per un inviluppo di sfere con focali (Σ) e (Σ') corrispondenti per linee di curvatura; la corrispondenza delle asintotiche sulle superficie (Σ) e (Σ') si traduce nell'equazione caratteristica:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}(X-iY) \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X-iY}{Z}\right)}{\frac{\partial}{\partial v}(X-iY) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X-iY}{Z}\right)} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(X+iY) \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X+iY}{Z}\right)}{\frac{\partial}{\partial v}(X+iY) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X+iY}{Z}\right)}$$

che deve coesistere con le (1) e (2).

Il problema è di quarto ordine.

Le considerazioni qui svolte saranno da me sviluppate analiticamente in prossimi lavori.

Messina, 21 novembre 1928.