# Bollettino Unione Matematica Italiana



Luigi Onofri


## Sul raggio di convergenza delle serie di potenze


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **8** (1929), n.2, p. 72–80.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_72_0>

# Sul raggio di convergenza delle serie di potenze.

Nota di Luigi Onofri (a Bologna).

**Sunto.** - *L'A studia la variazione del raggio di convergenza di una serie di potenze in corrispondenza delle infinite sostituzioni eseguibili sui coefficienti della serie stessa.*

**1.** Il raggio $R$ di convergenza di una serie di potenze:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \tag{1}$$

dipende, non solo dai valori dei coefficienti $a_n$ che definiscono la serie data, ma anche, come ora vedremo, dall'ordine con cui i coefficienti medesimi compariscono nella (1).

In altri termini, il raggio di convergenza di una serie ottenuta dalla (1) mediante la sola alterazione dell'ordine dei coefficienti è, in generale, diverso dal numero $R$.

Ad esempio, se sui coefficienti della serie:

$$1 + kx + k^2x^2 + \dots + k^n x^n + \dots \qquad (k > 0 \text{ e } \neq 1),$$

il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{k}$, eseguiamo la sostituzione:

$$(k, k^2) \cdot (k^4, k^8) \cdot \dots \cdot \left(k^{2^n}, k^{2^{n+1}}\right) \cdot \dots,$$

otteniamo una nuova serie per la quale la successione $\sqrt[n]{|a_n|}$ ha i punti limiti $k^2$, $k$, $k^{\frac{1}{2}}$.

Il raggio di convergenza di questa serie sarà pertanto $\frac{1}{k^2}$ o $\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ secondo che $k$ è maggiore o minore di 1.

**2.** In questa nota suppongo che la successione $\sqrt[n]{|a_n|}$ abbia limite e, sotto questa ipotesi, studio la variazione del raggio di convergenza della (1) in corrispondenza delle infinite sostituzioni eseguibili sugli elementi: $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

Le proposizioni ed i risultati relativi alla teoria delle sostituzioni su infiniti elementi a cui ricorrerò frequentemente nel seguito, si trovano esposti in due mie Memorie [1] alle quali rimando il lettore.

**3.** Sia $s$ una sostituzione sull'insieme numerabile $I$ di elementi:

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad n, \ldots$$

e sia:

$$(\alpha) \qquad \frac{0}{s(0)}, \quad \frac{1}{s(1)}, \ldots, \quad \frac{n}{s(n)}, \ldots$$

la successione che si ottiene considerando il rapporto fra il numero generico $n$ di $I$ ed il numero $s(n)$ che la $s$ sostituisce ad $n$.

Se la $s$ opera su un numero finito di elementi, i termini di $(\alpha)$ sono, da un certo punto in poi, tutti eguali ad 1; se invece *la s opera su infiniti elementi di* I, *esistono infiniti rapporti di* $(\alpha)$ *maggiori di* 1 *ed infiniti minori di* 1.

Infatti, se a partire da un certo $r$ si avesse:

$$\frac{r}{s(r)} < 1, \quad \frac{r+1}{s(r+1)} \leq 1, \ldots, \quad \frac{r+m}{s(r+m)} \leq 1, \ldots$$

e cioè:

$$s(r+m) > r \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

l'operazione $s$ dovrebbe sostituire agli $r$ elementi: $0, 1, \ldots, r-1$ gli $r+1$ elementi: $0, 1, \ldots, r$, il che è manifestamente assurdo.

Osservando poi che il ragionamento ora fatto può ripetersi per la sostituzione $s^{-1}$, si può asserire che nella successione $(\alpha)$ esistono infiniti termini $< 1$.

**4.** Da quanto si è ora stabilito, si deduce immediatamente che il limite minimo $l$ ed il limite massimo $L$ di $(\alpha)$ soddisfano alle diseguaglianze:

$$l \leq 1, \quad L \geq 1.$$

Se poi $l = L$, dovrà aversi:

$$l = L = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{s(n)} = 1.$$

[1] L. Onofri, *Teoria delle sostituzioni che operano su una infinità numerabile di elementi.* « Annali di Matematica », tomo IV, fasc. 1-2; tomo V, fasc. 1-2.

Avvertiamo inoltre che, per brevità di linguaggio, i numeri $l$ ed $L$ verranno rispettivamente chiamati *limite minimo* e *massimo di* s e che, per *punto limite di* s, dovrà intendersi un punto limite della successione (x) corrispondente ad $s$.

**5.** Siano $s$, $t$ due sostituzioni sull'insieme $I$ e siano $E_s$, $E_t$ i rispettivi insiemi derivati. Se $E_s$ ed $E_t$ sono limitati superiormente, i punti limiti della sostituzione $u = s \cdot t$ si ottengono come prodotto di elementi di $E_s$ per elementi di $E_t$.

Si ha infatti:

$$\frac{n}{u(n)} = \frac{n}{s(n)} \cdot \frac{s(n)}{t(s(n))}.$$

Da ciò discende che:

*Se un insieme* E *di numeri costituisce un gruppo od uno pseudogruppo, tutte le sostituzioni su* I, *i cui punti limiti appartengono ad* E, *formano rispettivamente un gruppo od uno pseudogruppo* G.

In particolare, se $E$ è l'insieme dei numeri $\geq 1$ e l'$\infty$, il complesso $G$ è uno pseudogruppo composto formato con tutte le sostituzioni che hanno per limite minimo 1.

È poi evidente che lo pseudogruppo $G^{-1}$ delle inverse delle operazioni di $G$ contiene tutte le sostituzioni che hanno per limite massimo 1.

**6.** Consideriamo una serie di potenze:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ed una sostituzione $s$ sull'insieme $I$. Se noi eseguiamo la $s$ sugli esponenti della $x$, otteniamo una nuova serie:

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s(n)}$$

che si può anche riguardare come proveniente dalla $p(x)$ mediante una opportuna sostituzione sui coefficienti $a_n$. Ciò ci assicura che, per la questione che abbiamo in vista, le sostituzioni sui coefficienti $a_n$ e le sostituzioni sugli esponenti $n$ sono operazioni del tutto equivalenti.

La serie $q(x)$, che abbiamo ottenuto operando sulla $p(x)$ la sostituzione $s$, verrà, per brevità, indicata con $s(p(x))$.

Osserviamo inoltre che i coefficienti $a_n$, potendosi sempre considerare numeri positivi o nulli, verranno scritti nella forma:

$$a_n = e^{\lambda_n}$$

con $\lambda_n$ reale.

**7.** Le sostituzioni su $I$ per le quali è $l = L = 1$, costituiscono un gruppo $H$ (n.° 5) ed hanno la proprietà di trasformare la serie $p(x)$ in un'altra serie avente il medesimo raggio $R$ di convergenza della $p(x)$.

Infatti, se $s$ appartiene ad $H$, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{s(n)} = 1,$$

e quindi:

$$\overline{\lim}\, e^{\frac{\lambda_n}{s(n)}} = \overline{\lim}\, e^{\frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{n}{s(n)}} = \overline{\lim}\, e^{\frac{\lambda_n}{n}} = \frac{1}{R}.$$

Sia poi $g \cdot s$ il prodotto di una operazione $g$ estranea ad $H$ per una operazione $s$ di $H$. Poichè:

$$g \cdot s(p(x)) = s[g(p(x))],$$

le due serie $g(p(x))$ e $g \cdot s(p(x))$ hanno lo stesso raggio di convergenza.

Consegue da ciò che tutte le sostituzioni che trasformano la $p(x)$ in serie aventi un medesimo raggio $R_1$ formano un insieme di quasi-gruppi di una decomposizione a sinistra del gruppo totale rispetto ad $H$. Il gruppo $H$ non coincide, in generale, con il complesso di tutte le sostituzioni che lasciano immutato $R$: questo complesso dipende dal valore di $R$ e la sua forma varia secondo che $R = 1$ o differisce dall'unità.

**8.** Supponiamo dapprima che il raggio $R$ di $p(x)$ sia diverso da zero e $< 1$. Ciò richiede, per quanto abbiamo supposto al n.° 2, che:

$$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{\lambda_n}{n}} = \frac{1}{R} = e^{\rho} \qquad (\rho > 0),$$

e cioè che:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \rho.$$

Prendiamo una sostituzione $s$ che abbia per limite massimo un numero $L$ scelto ad arbitrio (ma necessariamente $\geq 1$). Una siffatta sostituzione si può realizzare nel modo seguente.

Sia:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

una successione tendente ad $L$ e tale che tutti i $p_n$ e tutti i $q_n$ siano numeri interi, positivi, fra loro diversi.

La sostituzione:

$$s = (p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n, q_n) \cdot \ldots,$$

formata con infiniti scambi, opera su elementi di $I$ e, come immediatamente si verifica, ha per limite massimo $L$.

Con questa sostituzione, o con una qualsiasi altra che abbia per limite massimo $L$, trasformiamo la $p(x)$.

Il raggio $R_1$ della $s(p(x))$ ci è dato da:

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim}\, e^{\frac{\lambda_n}{s(n)}}} = \frac{1}{\overline{\lim}\, e^{\frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{n}{s(n)}}} = \frac{1}{e^{\rho L}} = R^L,$$

ed esso, per l'arbitrarietà di $L$, può assumere qualsiasi valore dell'intervallo $(0, R)$ (estremi inclusi).

Per $L = 1$ si ha $R_1 = R$ e cioè:

*Le sostituzioni che lasciano immutato il raggio di convergenza hanno per limite massimo* 1 *e, come tali, costituiscono uno pseudogruppo composto* (n.° 5).

**9.** Il caso in cui $R > 1$ si può trattare in un modo perfettamente analogo a quello usato al n.° 8.

Così procedendo si dimostra che:

a) *Le sostituzioni per le quali* R *è invariante hanno per limite minimo* 1 *e formano uno pseudogruppo composto.*

b) *Preso ad arbitrio un numero positivo* $l < 1$ *e scelta una sostituzione* s *che abbia per limite minimo* l, *la serie* s(p(x)) *ha per raggio* $R_1$ *di convergenza il numero* $R^l$.

In particolare, per $l = 0$ si ha $R_1 = 1$.

**10.** Se la serie $p(x)$ ha raggio zero, qualunque sostituzione $s$ non può alterare il valore di detto raggio.

Infatti, essendo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \infty, \quad \overline{\lim}\, \frac{n}{s(n)} \geq 1,$$

si ha:

$$\overline{\lim}\, \frac{\lambda_n}{s(n)} = \overline{\lim}\, \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{n}{s(n)} = \infty.$$

**11.** Esaminiamo ora il caso in cui $R$ è infinito.

Sia $s$ una sostituzione avente il limite minimo $l > 0$.

Poichè, per ipotesi, è:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} = -\infty, \quad \frac{n}{s(n)} > k > 0,$$

si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{s(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{n}{s(n)} = -\infty,$$

e cioè tutte le sostituzioni che hanno il limite minimo $> 0$ lasciano invariato il raggio di convergenza. Queste sostituzioni costituiscono evidentemente uno pseudogruppo composto $K$ (n.° 5).

Osserviamo però che, oltre alle operazioni di $K$, esistono altre sostituzioni aventi la medesima proprietà di quelle di $K$. Di siffatte operazioni, che hanno per limite minimo zero, daremo fra breve qualche esempio.

Vogliamo dapprima determinare una operazione $s$ in modo che la serie $s(p(x))$ abbia per raggio di convergenza un numero prefissato $R_1 = e^{\rho} \geq 1$.

Consideriamo una successione:

$$\lambda_{v_1}, \quad \lambda_{v_2}, \ldots, \quad \lambda_{v_n}, \ldots$$

estratta dalla:

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \ldots, \quad \lambda_n, \ldots$$

e tale che (per fissare le idee) gli indici $v_n$ siano tutti numeri pari.

Prendiamo quindi una successione:

$$(a) \qquad \rho_1, \quad \rho_2, \ldots, \quad \rho_n, \ldots$$

di numeri positivi tendente a $\rho$ e formiamo la nuova successione:

$$(b) \qquad \frac{|\lambda_{v_1}|}{\rho_1}, \quad \frac{|\lambda_{v_2}|}{\rho_2}, \ldots, \quad \frac{|\lambda_{v_n}|}{\rho_n}, \ldots.$$

Se con:

$$s(v_1), \quad s(v_2), \ldots, \quad s(v_n), \ldots$$

indichiamo i massimi interi dispari contenuti nella $(b)$, abbiamo:

$$\frac{|\lambda_{v_n}|}{\rho_n} = s(v_n) + \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n < 2),$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\lambda_{v_n}|}{s(v_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{|\lambda_{v_n}|}{\frac{|\lambda_{v_n}|}{\rho_n} - \varepsilon_n} = \rho.$$

Da ciò segue che la sostituzione:

$$s = \begin{pmatrix} v_n \,, & s(v_n) \\ s(v_n), & v_n \end{pmatrix},$$

formata con infiniti scambi, riduce il raggio di convergenza della $p(x)$ al numero prefissato $e^{l'} = R_1$.

Se poi la $(a)$ è tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{|\lambda_{v_n}|}{\rho_n v_n} = \infty,$$

la sostituzione $s$ ha per limite minimo zero e, come facilmente si verifica, non altera il raggio di convergenza della $p(x)$.

Resta così provato che il complesso $C$ di tutte le sostituzioni che lasciano invariato il raggio della $p(x)$ è più ampio dello pseudogruppo $K$ costruito superiormente.

Notiamo infine come il complesso $C$ non sia, in generale, nè un gruppo nè uno pseudogruppo.

Invero, se $s$ e $t$ sono due operazioni di $C$, si ha:

$$\frac{\lambda_n}{s \cdot t(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{s(n)}} \cdot \frac{\lambda_{s(n)}}{t(s(n))}.$$

e poichè il comportamento del 2° membro dipende dal fattore $\frac{\lambda_n}{\lambda_{s(n)}}$, può darsi benissimo che $\frac{\lambda_n}{s \cdot t(n)}$ non tenda a $-\infty$.

Ad esempio, se poniamo:

$$\lambda_{2n} = -(2n)^3, \quad \lambda_{2n+1} = -(2n+1)^2,$$

le sostituzioni:

$$s = \begin{pmatrix} 2n, & 2n+1 \\ 2n+1, & 2n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2n, & (2n+1)^2 \\ (2n+1)^2, & 2n \end{pmatrix}$$

appartengono a $C$, mentre il loro prodotto $s \cdot t$ riduce il raggio della $p(x)$ al valore $e$.

Basta infatti osservare che:

$$s \cdot t(2n+1) = (2n+1)^2, \quad \frac{\lambda_{2n+1}}{s \cdot t(2n+1)} = -1.$$

**12.** Supponiamo infine che il raggio di $p(x)$ sia eguale ad 1. Poichè, in virtù della nostra ipotesi, è:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0,$$

tutte le sostituzioni che hanno il limite massimo finito lasciano invariato il raggio di $p(x)$.

Se, inoltre, esiste un numero positivo $M$ tale che per ogni $n$ si abbia:

$$(a) \qquad \lambda_n < M,$$

qualunque sostituzione $s$ non altera il raggio della $p(x)$.

Invero, da:

$$\frac{\lambda_n}{s(n)} < \frac{M}{s(n)}$$

risulta che la successione:

$$\frac{\lambda_0}{s(0)}, \quad \frac{\lambda_1}{s(1)}, \ldots, \quad \frac{\lambda_n}{s(n)}, \ldots$$

non può avere punti limiti positivi, e da:

$$\frac{\lambda_n}{s(n)} = \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{n}{s(n)}$$

si deduce (poichè vi sono infiniti $\frac{n}{s(n)} \leq 1$) che la medesima successione ha per punto limite lo zero.

Ammettiamo invece che la condizione $(a)$ non sia verificata e cioè che esista una successione:

$$\lambda_{r_1}, \quad \lambda_{r_2}, \ldots, \quad \lambda_{r_n}, \ldots$$

tendente a $+\infty$.

Si può allora, mediante un procedimento del tutto analogo a quello tenuto al n.° 11, determinare delle sostituzioni $s$ tali che il raggio della $s(p(x))$ abbia un valore arbitrario $< 1$.

Se poi osserviamo che in tutti i casi trattati precedentemente (escluso quello, privo d'interesse, in cui $R = 0$) ci è sempre stato possibile di modificare il valore di $R$, possiamo affermare che:

*Una serie di potenze, per la quale esista il limite di* $\sqrt[n]{|a_n|}$, *ha il raggio* $R$ *di convergenza invariante rispetto a tutte le sostituzioni sui coefficienti se, e solo se* $R = 1$ *e la successione* $|a_n|$ *è limitata.*

**13.** Vogliamo per ultimo notare come, dalle considerazioni fin qui svolte, risulti immediatamente che:

*Se, data una serie:*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

*si può determinare una sostituzione* s *sui coefficienti tale che per la serie trasformata:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{s(n)} x^n \tag{2}$$

*esista il limite di* $\sqrt[n]{|a_{s(n)}|}$, *il raggio di convergenza della* (2) *è massimo fra tutti i raggi delle serie ottenute dalla* (1) *mediante sostituzioni sui coefficienti.*