Corradino Mineo

Distribuzioni della massa nell'interno d'un pianeta compatibili con una assegnata azione esterna

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **8** (1929), n.2, p. 65–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

PICCOLE NOTE

Distribuzioni della massa nell' interno d' un pianeta compatibili con una assegnata azione esterna.

Nota di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Sunto. - *L'A., noti sulla superficie d'un pianeta i valori della funzione potenziale esterna e della sua derivata normale, risolve, sotto condizioni poco restrittive, il problema di assegnare la più generale funzione potenziale interna del pianeta, dipendente da una funzione arbitraria (non impegnata sotto segni integrali). Ne fa applicazione al caso di* CLAIRAUT.

Il problema di cui mi occupo in questa Nota è il seguente: *Data una superficie d'equilibrio esteriore d'un pianeta, trovare la più generale funzione potenziale interna compatibile con l'azione esterna del pianeta stesso.* In particolare tratto il caso, tanto importante nelle applicazioni, in cui la superficie sia un ellissoide, fermandomi più specialmente sull'ipotesi d'un ellissoide di rotazione, che sia vicino a una sfera *nell'ordine di approssimazione di Clairaut.*

Sia S la superficie (chiusa), supposta d'equilibrio, e τ il dominio dei punti interni a S e sulla frontiera S. Fu primo lo STOKES (1867) a notare che tutto si riduce a costruire una funzione continua in τ, essendo prefissati, sulla frontiera S, i valori di essa e della sua derivata normale. In particolare lo STOKES mostra come si possa ottenere una speciale distribuzione in cui tutta la massa è distesa su S in semplice strato con densità superficiale finita (o in uno strato infinitesimo e infinitamente denso): per la qual cosa, occorre risolvere un doppio problema di DIRICHLET esterno e interno [1].

[1] STOKES, *On the internal distribution of matter wich shall produce a given potential at the surface of a gravitating mass.* « Math. and Phys. Papers », Cambridge, vol. IV, (1904), pp. 277-282.

Del grado d'indeterminazione del problema si occuparono appresso il PIZZETTI (1909), con le sue importanti considerazioni sui corpi di attrazione nulla [1], e il LAURICELLA (1911); il quale costruisce la più generale funzione potenziale interna per mezzo della seconda funzione di GREEN, pervenendo allo scultorio risultato, che quel che d'arbitrario rimane della densità è il suo Δ_2 [2].

Subito dopo il CRUDELI (1911) [3], cercando di generalizzare un risultato del PIZZETTI, giunse alla conclusione che quanto d'arbitrario resta della densità è la funzione $\Delta_2(us^2)$, essendo $s = 0$ l'equazione cartesiana di S e u una funzione *regolare* nell'interno di S [4].

Nel 1915, occupandomi anch'io della questione, dimostrai che trovata la densità del semplice strato superficiale, cui corrisponde la prestabilita azione esterna [5], si possono assegnare quante si vogliono densità *spaziali* nell'interno di S, tutto riducendosi a determinare una funzione in τ che sulla frontiera assuma prefissati valori [6].

Recentemente il BRILLOUIN (1925), a proposito d'isostasia terrestre, ha suggerito un modo semplice di costruire quante si vogliono funzioni potenziali all'interno della superficie S (la quale, in astratto, può, se si vuole, non esser supposta d'equilibrio), quando

[1] PIZZETTI, *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra*. « Annali di Matematica », Milano, t. XVII, (1910). In questa fondamentale Memoria il PIZZETTI assegna alcune distribuzioni compatibili con l'ipotesi che una superficie d'equilibrio esteriore terrestre sia un ellissoide.

[2] LAURICELLA, *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*. « Rend. Lincei », vol. XX, (1911), fasc. 2°.

[3] CRUDELI, *I corpi di attrazione nulla*. « Rend. Lincei », vol. XXI, (1911), fasc. 7°.

[4] È però da notare che questa conclusione si fonda in sostanza sulla premessa che ogni funzione V continua in τ e nulla su S debba esser della forma $V = us$, con u continua nell'insieme dei punti interni a S. Ma dall'annullarsi di V su S, pure ammettendo che s non si annulli mai nell'interno di S, non discende senz'altro che $u = \frac{V}{s}$ resti limitata nell'insieme dei punti *interni* a S.

[5] Non sempre, s'intende, un problema di DIRICHLET è risolubile per mezzo d'un potenziale di semplice strato, giacchè le derivate prime della funzione cercata possono non esistere o divenire infinite sul contorno; ma son, questi, casi da escludere nella questione che ci occupa.

[6] MINEO, *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a una assegnata azione esterna*. « Rend. Lincei », vol. XXIV, (1915), fasc. 10°.

si conoscano i valori che su S assumono la funzione potenziale esterna e la sua derivata normale [1].

È appunto il metodo che qui voglio generalizzare e applicare.

È infine da ricordare la recentissima Memoria del LAURA, il quale, dal punto di vista generale, dà soltanto una particolare distribuzione, purchè si conoscano già due funzioni, una delle quali assuma su S i valori della funzione potenziale esterna e l'altra i valori della derivata normale della anzidetta funzione, ammettendo col CRUDELI che ogni altra distribuzione non possa differire dalla proposta se non per una funzione della forma us^2 [2].

1. In fondo il BRILLOUIN pensa a un sistema triplo ortogonale del quale faccia parte la superficie S. Siano ρ, μ, ν le coordinate curvilinee d'un punto generico dello spazio, in un tal sistema, e sia $\rho = \rho_0$ l'equazione di S. Sia poi $V_e(\rho, \mu, \nu)$ la funzione potenziale del pianeta all'esterno di S e quindi $V_0 = V_e(\rho_0, \mu, \nu)$ la funzione alla quale essa si riduce su S. Allora

$$(1) \qquad V_i = V_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{\partial V_e}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} + (\rho - \rho_0)^2 F(\rho, \mu, \nu),$$

dove $F(\rho, \mu, \nu)$ è una funzione arbitraria in τ (continua e derivabile), è una funzione dei punti del dominio τ, che sulla S si riduce a V_0 e ammette su S derivata normale eguale a quella di V_e.

Ora è facile estendere questo risultato. Anzitutto una superficie qualunque S appartiene a una infinità di sistemi tripli ortogonali ρ, μ, ν. Due funzioni, poi, date in τ e che assumano valori eguali su S insieme con le loro derivate normali, non possono differire se non per una funzione $f(\rho, \mu, \nu)$ dei punti di τ, nulla su S

[1] BRILLOUIN, *Champ de gravitation extérieur et densités internes.* « Comptes rendus », Paris, vol. 180 (1925), pp. 987-989.

[2] LAURA, *Distribuzione di materia nell'interno d'un pianeta compatibile con la sua azione esterna.* « Memorie della Società Astronomica Italiana », Roma, vol. III, (1926).

Il LAURA mostra pure come si possa trovare una densità nel caso (affatto teorico) che S, supposta ellissoidica, sia la superficie *fisica* del pianeta, mentre il campo esterno sia rappresentato da una generica funzione armonica regolare e nulla all'infinito. Questo problema, *qualunque sia S*, ma ammesso che la funzione armonica abbia derivata normale finita su S (circostanza sottintesa dal LAURA), si risolve tanto col mio metodo esposto nella Nota citata del 1915 quanto col metodo che si espone nella presente Nota.

insieme con la sua derivata normale. Ora poichè esiste sempre per ipotesi

$$\lim_{\rho \to \rho_0} \frac{f(\rho, \mu, \nu) - f(\rho_0, \mu, \nu)}{\rho - \rho_0} = \lim_{\rho \to \rho_0} \frac{f(\rho, \mu, \nu)}{\rho - \rho_0},$$

ne segue che $\dfrac{f(\rho, \mu, \nu)}{\rho - \rho_0}$ è una funzione continua senza eccezione in tutto τ; sicchè si ha

$$f(\rho, \mu, \nu) = (\rho - \rho_0)\psi(\rho, \mu, \nu),$$

con $\psi(\rho, \mu, \nu)$ continua in τ. Affinchè inoltre $f(\rho, \mu, \nu)$ abbia derivata normale nulla su S, occorre e basta che $\psi(\rho, \mu, \nu)$, derivabile almeno rispetto a ρ in τ, si annulli anch'essa per $\rho = \rho_0$. *Se ammettiamo addirittura l'esistenza della derivata* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}$ *sulla frontiera* S (1), possiamo concludere che dev'essere allora

$$f(\rho, \mu, \nu) = (\rho - \rho_0)^2 F(\rho, \mu, \nu);$$

e la (1) dà, nelle condizioni predette, la più generale funzione potenziale interna compatibile con l'assegnata azione esterna del pianeta.

E s'intende che la $F(\rho, \mu, \nu)$ va assoggettata a ulteriori condizioni, se si vuole che valga il teorema di POISSON.

2. Veniamo ora al caso in cui una superficie d'equilibrio esteriore del pianeta sia un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

rotante intorno all'asse minore c con velocità angolare costante ω.

Posto

$$\rho_0^2 - a^2 = \alpha^2, \quad \rho_0^2 - b^2 = \beta^2, \quad \rho_0^2 - c^2 = \gamma^2, \quad \alpha^2 < \beta^2 < \gamma^2, \tag{3}$$

consideriamo la famiglia di quadriche omofocali

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - \gamma^2} = 1 \tag{4}$$

e chiamiamo ρ, μ, ν le coordinate ellittiche del punto (x, y, z), essendo

$$+\infty > \rho^2 > \gamma^2 > \mu^2 > \beta^2 > \nu^2 > \alpha^2 > 0. \tag{5}$$

(1) Questa ipotesi, naturalmente, pone vincoli alla densità interna. Si veda la Memoria del PETRINI, *Les derivées premières et secondes du potentiel.* « Acta Mathematica », vol. 31, (1908), pp. 127-332.

Per $\lambda = \rho_0$ si ha l'ellissoide (2).

Per avere la V_e, occorre risolvere un problema di DIRICHLET esterno; cosa che si consegue immediatamente, non appena si sappia sviluppare in serie di prodotti MN di LAMÉ la funzione V_0 alla quale si riduce V_e sull'ellissoide (2). Sia

$$(6) \qquad V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} A_n^{(i)} M_n^{(i)} N_n^{(i)}$$

questo sviluppo. Chiamando $R_n^{(i)}$ e $S_n^{(i)}$ le funzioni di LAMÉ di 1ª e di 2ª specie corrispondenti a $M_n^{(i)} N_n^{(i)}$, si ha subito

$$(7) \qquad V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{A_n^{(i)}}{\left(S_n^{(i)}\right)_0} S_n^{(i)} M_n^{(i)} N_n^{(i)} \quad (^1),$$

dove $\left(S_n^{(i)}\right)_0 = \left(S_n^{(i)}\right)_{\rho=\rho_0}$.

Nel caso nostro dev'essere

$$V_0 = C - \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2),$$

essendo C una costante e f la costante dell'attrazione universale. Ora, essendo θ e φ la colatitudine e la longitudine d'un punto (polo l'origine e asse polare l'asse delle z), si ha

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = \frac{2\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2}{3} +$$
$$+ \left[(\rho^2 - \alpha^2)\,\text{sen}^2\,\theta\cos^2\varphi + (\rho^2 - \beta^2)\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}^2\,\varphi - \frac{2\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2}{3}\right],$$

dove l'espressione dentro la parentesi rettangolare è una funzione sferica di 2º ordine su ogni ellissoide, epperò rappresentabile per mezzo d'una combinazione lineare di prodotti di funzioni di LAMÉ di 2º grado: precisamente dei due prodotti

$$(9) \qquad M_2^{(1)} N_2^{(1)} = (\mu^2 - \alpha_1^2)(\nu^2 - \alpha_1^2), \quad M_2^{(2)} N_2^{(2)} = (\mu^2 - \alpha_2^2)(\nu^2 - \alpha_2^2),$$

essendo

$$(10) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2), \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{3}(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2).$$

(1) Nel caso particolare dei pianeti, l'HAMY trova V_e per una via indiretta e assai faticosa, partendo dall'espressione generale del potenziale d'un ellissoide eterogeneo [Cfr. *Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes*. « Journal de Mathématiques », t. VI, (1890), pp. 69-143].

Si trova

$$x^2 + y^2 = \frac{2\rho^2 - \alpha^2 - \beta^2}{3} + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{3(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \left\{ \left(\frac{\rho^2 - \alpha_1^2}{\gamma^2 - \alpha_1^2} + 2 \right) M_2^{(1)} N_2^{(1)} - \left(\frac{\rho^2 - \alpha_2^2}{\gamma^2 - \alpha_2^2} + 2 \right) M_2^{(2)} N_2^{(2)} \right\}.$$

La (7) si riduce quindi nel nostro caso alla seguente:

$$V_e = M \int_\rho^\infty \frac{\rho d\rho}{H(\rho)} + \sum_{i=1}^{i=2} \frac{A_2^{(i)}}{(S_2^{(i)})_0} S_2^{(i)} M_2^{(i)} N_2^{(i)}. \tag{12}$$

dove

$$\left\{ \begin{aligned} & H(\rho) = \sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^2 - \gamma^2)}, \quad S_2^{(i)} = 5(\rho^2 - \alpha_i^2) \int_\rho^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - \alpha_i^2)^2 H(\rho)}, \\ & A_2^{(1)} = \frac{\omega^2}{6f(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \left(\frac{\rho_0^2 - \alpha_1^2}{\gamma^2 - \alpha_1^2} + 2 \right), \quad A_2^{(2)} = \frac{\omega^2}{6f(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \left(\frac{\rho_0^2 - \alpha_2^2}{\gamma^2 - \alpha_1^2} + 2 \right) \end{aligned} \right. \tag{13}$$

e M è la massa totale del pianeta.

Si hanno così tutti gli elementi per scrivere la V_i più generale del pianeta, data dalla (1).

3. Occupiamoci del caso più importante in cui l'ellissoide è di rotazione ($\alpha^2 = \beta^2 < \gamma^2$). In questo caso degenere le coordinate ellittiche diventano ρ, μ, ν', essendo

$$+\infty > \rho^2 > \gamma^2 > \mu^2 > \alpha^2, \quad 1 > \nu'^2 > 0. \tag{14}$$

Ponendo

$$\operatorname{sen} \vartheta = \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}}, \quad \nu' = \operatorname{sen} \varphi, \tag{15}$$

φ è proprio la longitudine e ϑ è analoga alla colatitudine θ (precisamente è l'angolo con l'asse z delle generatrici del cono assintotico all'iperboloide rotondo a una falda passante per il punto considerato). Si ha poi

$$\alpha_1^2 = \alpha^2, \quad \alpha_2^2 = \frac{\alpha^2 + 2\gamma^2}{3}, \quad M_2^{(1)} N_2^{(1)} = 0, \tag{16}$$

$$M_2^{(2)} N_2^{(2)} = \frac{2}{3} (\gamma^2 - \alpha^2)^2 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right),$$

e si trova facilmente

$$V_e = \frac{M}{c} \frac{\operatorname{arctg} \eta}{\varepsilon} + \frac{\omega^2 c^2}{2f} \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} (1 + \varepsilon^2) \frac{(\eta^2 + 3) \operatorname{arctg} \eta - 3\eta}{(\varepsilon^2 + 3) \operatorname{arctg} \varepsilon - 3\varepsilon} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right), \tag{17}$$

dove

$$\eta=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\rho^2-\gamma^2}},\qquad \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}. \tag{18}$$

4. Veniamo infine al caso dell'approssimazione di CLAIRAUT, considerando ε^2, η^2, ω^2 come quantità piccole del 1° ordine e trascurando il 2° ordine. In questa approssimazione è

$$V_e=\frac{M}{(\rho^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{\varepsilon^2c^2}{3(\rho^2-\gamma^2)}\right)+\frac{\omega^2c^5}{2f(\rho^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\cos^2\vartheta-\frac{1}{3}\right); \tag{19}$$

epperò la (1) diventa

$$V_i=\frac{M}{c}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{3}\right)+\frac{\omega^2c^2}{2f}\left(\cos^2\vartheta-\frac{1}{3}\right)+ \tag{20}$$
$$+(\rho_0-\rho)\rho_0\left|\frac{M}{c^3}(1-\varepsilon^2)+\frac{\omega^2}{2f}(3\cos^2\vartheta-1)\right|+(\rho_0-\rho)^2F(\rho,\vartheta,\varphi).$$

dove ρ varia nell'intervallo (γ, ρ_0).

Vediamo quali altre condizioni siano necessarie affinchè il Δ_2V_i risulti finito per $\gamma\leqq\rho\leqq\rho_0$ e qualunque siano ϑ, φ. Si ha *rigorosamente*

$$\Delta_2F=\frac{\sqrt{\rho^2-\gamma^2}}{\rho(\rho^2-\gamma^2+\varepsilon^2c^2\cos^2\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\sqrt{\rho^2-\gamma^2}}{\rho}(\rho^2-\gamma^2+\varepsilon^2c^2)\,\mathrm{sen}\,\vartheta\frac{\partial F}{\partial\rho}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\sqrt{\rho^2-\gamma^2}}\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\rho(\rho^2-\gamma^2+\varepsilon^2c^2\cos^2\vartheta)}{\sqrt{\rho^2-\gamma^2}(\rho^2-\gamma^2+\varepsilon^2c^2)\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right]\right\},$$

dalla quale espressione si scorge subito che occorre e basta siano finite le funzioni

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\vartheta}\frac{\partial F}{\partial\vartheta},\qquad \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2},$$

per la qual cosa basta p. es. prendere F della forma

$$F=F_1(\rho)+F_2(\rho,\vartheta,\varphi)\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta.$$

5. Si vede così quanta arbitrarietà resti per la densità interna senza che cambi per nulla l'azione esterna (e quindi la gravità superficiale) del pianeta. Questo fatto va senza dubbio tenuto presente nelle odierne investigazioni sulla distribuzione delle masse nell'interno della Terra. D'altra parte, però, sbizzarrirsi in ipotesi *a priori* sulla forma di F può riuscire opera sterile, se quelle ipotesi non hanno alcun significato fisico: idrostatico, elastico, geologico. Da questo punto di vista le distribuzioni che tengono conto dei principi dell'Idrostatica (in virtù dei quali il $\Delta_2 V_i$ deve soddisfare a una ulteriore condizione) hanno una particolare importanza, come quelle che discendono dall'ipotesi plausibile d'una configurazione d'equilibrio del pianeta, originariamante fluido, non disturbata dalla successiva solidificazione.

Palermo, gennaio 1929.