Gino Loria

Corrispondenza

* Sulla costruzione approssimata di π utilizzando riga e compasso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **8** (1929), n.1, p. 54–58.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_54_0>

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

35. [1] Ritengo non esista un'opera in cui siano esposte e valutate tutte le costruzioni sino ad oggi proposte per determinare approssimativamente il valore di π. La relativa questione essendo stata sollevata in queste colonne, in seguito all'enunciazione di un nuovo procedimento ideato per l'indicato scopo [2], sembra opportuno esaminare anzitutto se ed in quale misura questo meriti la preferenza di fronte ad altri, sia riguardo alla semplicità del tracciato, che rispetto all'approssimazione raggiunta. E poichè l'autore

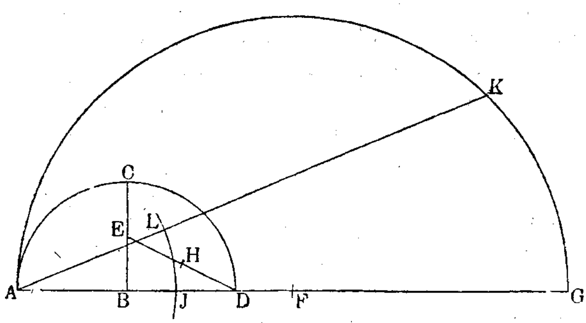

Fig. 1

non ha calcolato il grado di esattezza ottenuto (od almeno non ha esposto il calcolo relativo), così reputo anzitutto necessario dare siffatto complemento alla sua pubblicazione, dopo di avere riferito la costruzione da lui immaginata:

Sia (Fig. 1) AB il raggio della circonferenza ACD di centro B che si vuole rettificare. Si eseguano le seguenti costruzioni: 1°) Si conduca il raggio BC perpendicolare a AD. 2°) Si segni il centro E del raggio BC. 3°) Si prolunghi AD di $DF = BE$. 4°) Si descriva la circonferenza AKG di centro F e raggio FA. 5°) Si determini l'intersezione K di questa con la circonferenza di centro G e rag-

[1] Questo « Bollettino », tomo VII, 1928, p. 264.

[2] J. Hartmann, *Rectificacion aproximada de la circonferencia* (« Boletin matematico » publicado por B. I. Baidaff, n. 19, 1928).

gio AD. 6°) Si conduca la retta DE. 7°) Di questo segmento si determini il centro H. 8°) Si determini il punto J di AD tale che sia $DJ = DH$. 9°) Si conduce la retta AK. 10°) Su questa si determina il punto L tale che risulti $AL = AJ$. *Il segmento* KL *risulterà eguale approssimativamente alla semicirconferenza* ACD.

Per verificare la verità di quest'asserzione basta provare che, supposto $= 1$ il raggio AB, sarà $KL = \pi$. A tale scopo si osservi che si ha successivamente:

$$AB = BD = 1, \quad DF = \frac{1}{2}, \quad DG = 5, \quad GK = 2, \quad AK = \sqrt{21};$$

$$ED = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad DJ = \frac{\sqrt{5}}{4};$$

$$AJ = AL = 2 - \frac{\sqrt{5}}{4};$$

$$LK = \sqrt{21} - 2 + \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ [1]} = 2.5825757 + 0.5590170 = 3.1415927.$$

Essendo $\pi = 3.1415926$, è $LK - \pi = 0.0000001$; LK è dunque approssimato per eccesso, ma la differenza è così piccola che la complicazione del tracciato è compensata dall'esattezza conseguita.

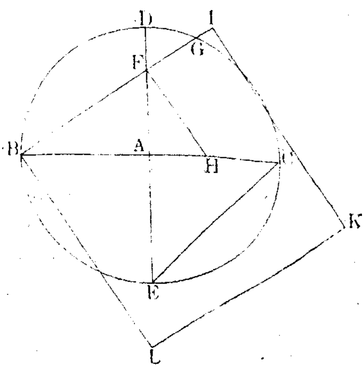

Fig. 2

Appunto in considerazione di tale complicazione, nasce spontanea l'idea di paragonarla con la seguente scoperta dal VIÈTE [2]:

Nel cerchio (Fig. 2) di centro A si conducano i due diametri fra loro perpendicolari BC, DE; si porti sul raggio AD, $AF = \frac{1}{2} CE$ e si conduca la retta BFG; sia poi AH la parte minore della retta AC divisa in media ed estrema ragione e sia I il punto della retta BFG, tale che si abbia

(1) $$BH : BF = BC : BI.$$

Il quadrato BIKL *descritto su* BI, al dire del citato matematico, è *proxime aequalis al dato cerchio.*

[1] Tutti i valori di radici quadrate qui adoperate sono tratti da Tavole del LUVINI.

[2] F. VIETAE, *Opera mathematica*, ed. Schooten (Lugd. Batav., 1646), p. 393.

Supposto, infatti, che il raggio di questo sia 1, ciò equivale a dire che π misura approssimativamente l'area del detto quadrato. Per accertarsene, osserviamo che, in forza delle costruzioni indicate, si ha:

$$AF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad BF = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad AH = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad BH = \frac{5-\sqrt{5}}{2};$$

la proporzione (1) diviene quindi

$$\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{BI}$$

onde

$$BI = \frac{2\sqrt{6}}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}(5+\sqrt{5})}{10}.$$

Segue da ciò

$$100\,\overline{BI}^2 = 6(30+10\sqrt{5}),$$

ossia

$$10\,\overline{BI}^2 = 6(3+\sqrt{5}) = 6 \times 5.236068,$$

onde

$$\overline{BI}^2 = 3.1416408$$

e

$$\overline{BI}^2 - \pi = 0.0000482.$$

Ciò prova che si è ottenuta un'approssimazione per difetto, cospicua, ma inferiore a quella data dalla costruzione dell'HARTMANN.

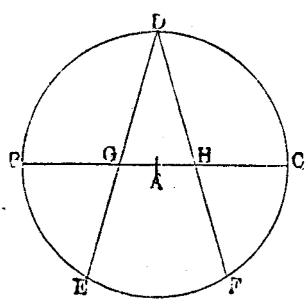

Fig. 3

Dopo VIÈTE la stessa questione venne risolta in vari modi da C. HUYGENS, nel celebre opuscolo *De circuli magnitudine inventa* (1654) [1]: fra essi emerge per semplicità il seguente: Sia (Fig. 3) BC un diametro di un dato cerchio; sia D il punto medio di una delle risultanti semicirconferenze, E e F siano quelli che dividono l'altra in tre parti eguali: se G e H sono le intersezioni delle rette DE, DF col diametro BC, *la somma* DG + GH *diminuita del quadrante* BD *non supera la cinquemillesima parte del diametro* BC. In altre parole, il sommo matematico olandese di-

(1) Riprodotto nel Vol. XII (Le Haye, 1910) delle *Oeuvres complètes de C. Huygens* (v. p. 145).

mostra che, supposto al solito $= 1$, il raggio del dato cerchio, è approssimativamente

$$\frac{\pi}{4} = DG + GH - 0.0002.$$

Di costruzione altrettanto semplice, ma di più agevole verifica, è un altro procedimento immaginato allo stesso scopo dal gesuita polacco KOKANSKI (1): ecco in che cosa consiste: Sia dato (Fig. 4) il semicerchio BCD di centro A: si conducano le tangenti in B e D e si portino su di esse e dalla stessa parte i segmenti BG, DH eguali al raggio del dato cerchio; la retta GH risulterà tangente allo stesso nel punto C: gli archi CE e CF siano di 60°; si proiettino i punti E, F in I, K rispettivamente su BG, DH e si porti su questa $DL = BD$. *Il segmento* IL *risulterà prossimamente eguale alla data semicirconferenza.* Senza insistere sull'osservazione che non tutte le linee indicate sono necessarie allo scopo, notiamo che, supposto al solito $= 1$ il raggio del circolo considerato, si ha:

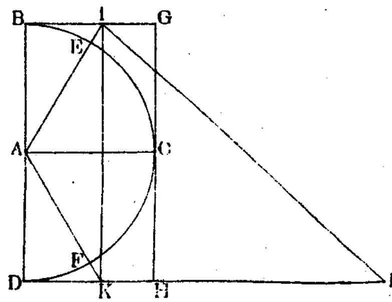

Fig. 4

$$DK = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad HK = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad KL = 3 - \sqrt{3}$$

$$IL^2 = 4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} = 9.8692317;$$

ora essendo $\pi^2 = 9.8696044$ si vedrà l'indiscutibile valore della costruzione esposta.

Siami lecito chiudere queste linee osservando che, anteriormente a tutti i matematici citati nel presente articolo, il CARDINALE DI CUSA (1401-1464) (2) scoperse (3) una pregevolissima soluzione del problema generale di rettificare per approssimazione un arco abbastanza piccolo (caso al quale evidentemente si può sempre ridursi). Sia desso (Fig. 5) $AM = \alpha$ e appartenga al cerchio di cen-

(1) V. l'articolo *Grammice rationes cyclometricae, ad usus mechanicos* inserito nel fascicolo di Agosto 1685 degli *Acta eruditorum*.

(2) Cfr. la mia *Storia delle matematiche*, vol. I (Torino, 1929), p. 430.

(3) V. lo scritto *De quadratura circuli*, stampato in: Card. CUSANI, *Opera omnia* (Parisiis, 1514).

tro O e diametro $AB = 2$. Si prolunghi questo oltre B per modo che risulti BC eguale al raggio; detta P l'intersezione della retta CM con la tangente in A, *sarà* AP *approssimativamente eguale al*

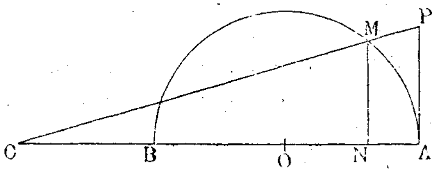

Fig. 5

l'arco AM. Per verificare ciò, osserviamo che, condotta MN perpendicolare a AB, si avrà:

$$AP : MN = AC : CN$$

onde

$$AP = \frac{3 \operatorname{sen} \alpha}{2 + \cos \alpha};$$

ora sviluppando in serie si trova

$$AP = \alpha - \frac{\alpha^5}{180} + \ldots$$

onde AP supera l'arco, ma la differenza è dell'ordine di grandezza della quinta potenza dell'arco stesso. GINO LORIA

35. Altra risposta è stata inviata dal Socio VINCENZO G. CAVALLARO, il quale annunzia di avere in corso di stampa presso la Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali di Napoli un lavoro riguardante idee geometrografiche, da cui emerge la possibilità di procedere alla classifica richiesta dall'A. della domanda. Egli aggiunge di avere pubblicato nel periodico « Schola et Vita », diretto da G. PEANO, la formula $\frac{3}{4}\left(a - \frac{1}{2}l + 2\right)$, dove a è l'apotema del decagono regolare inscritto nel cerchio unitario ed l è il lato del pentagono regolare inscritto, che dà $\sqrt{\pi}$ a meno di 41.10^{-8}.

Sull'argomento vedi I. TROPFKE, « Geschichte der Elementarmathematik », T. IV, p. 195-238. Vedi anche l'articolo di B. CALÒ nelle « Questioni riguardanti le Matematiche Elementari », raccolte da F. ENRIQUES. *(a. m.)*

36. Il laureando può consultare, nel « Mémorial des Sciences Mathématiques », il fasc. XX : A. BLOCH, *La fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité*, Paris, 1926.

G. VALIRON
professore all'Università di Strasburgo.