RECENSIONI

É. CARTAN: *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann.* Paris, Gauthier-Villars, 1928, pag. VI–273.

Quest'opera contiene uno studio assai approfondito sulla natura geometrica degli spazi riemanniani: e particolarmente, di certe classi notevoli di questi spazi, come gli spazi riemanniani normali, gli spazi a metrica cayleyana (non–euclidei), e quelli che differiscono soltanto dal punto di vista dell'*Analysis situs* dagli spazi euclidei o non-euclidei. Come già nel « *Mémorial* » dedicato dall'A. nel 1925 a questo stesso soggetto — del quale vari elementi sono qui ripresi e più largamente sviluppati — il punto di vista dell'A. è sostanzialmente questo: considerando lo spazio riemanniano come risultante della giustapposizione di infinite porzioni di spazi euclidei (fra loro raccordate mediante la legge di *parallelismo,* o la *connessione* dello spazio), l'A. conserva sempre nello studio di questi spazi il contatto più stretto con la geometria euclidea, e mette in particolare evidenza quali sono le proprietà di questa geometria che sussistono inalterate nella geometria dello spazio riemanniano, e quali sono invece le differenze sostanziali fra le due geometrie. Ma l'A. si eleva anche dall'ordinario studio *locale,* all'esame di svariate questioni relative all'*Analysis situs* negli spazi riemanniani; ad es. allo studio delle rappresentazioni *isometriche* di uno spazio riemanniano a metrica localmente euclidea, *considerato nella sua integrità,* su di uno spazio euclideo. Oltre a queste ricerche di geometria *integrale,* e alle interessanti considerazioni sugli assiomi del piano e di libera mobilità, sulla curvatura riemanniana lineare, sugli spazi riemanniani normali — delle quali dirò più innanzi — molte altre attraenti novità troviamo in questo volume: ma del resto tutta la trattazione, anche nei riguardi delle teorie classiche, ha un'impronta spiccatamente originale.

Negli sviluppi analitici — pei quali egli ricorre, volta a volta, al calcolo differenziale ordinario, a quello assoluto (di RICCI), alla teoria delle forme differenziali esterne (« *extérieures* »); a rappresentazioni vettoriali o scalari, ciò secondo l'opportunità e in relazione con la natura della questione da trattare — l'A. è sempre assai discreto, evitando ogni complessità e formalismo superfluo:

spesso egli preferisce ricorrere ad eleganti considerazioni sintetiche. Assai notevoli i punti di contatto che alcuni risultati contenuti in quest' opera hanno sia con lo studio dei fondamenti della geometria elementare, sia con la teoria delle funzioni di variabile complessa. Su questo tornerò durante l' esposizione sommaria che ora darò del contenuto dell' opera.

Nel Cap. I. (*Coordinate cartesiane; vettori, tensori*) l' A. introduce le nozioni fondamentali di algebra tensoriale in un R_n euclideo. Egli procede per gradi: partendo dal *vettore* costruisce, come ente geometrico, il *bivettore*, poi il *trivettore* e in generale, il *p-vettore (multivettore)* (1); soffermandosi quanto occorre sulle operazioni: *moltiplicazione esterna* (*alternata*, secondo SCHOUTEN) e *moltiplicazione scalare*, che servono per costruire quegli enti e per ricavarne degli invarianti scalari. Soltanto a questo punto l' A. passa alla nozione generale di tensori e allo studio delle operazioni tra tensori qualunque. È degno di nota il tipo di dimostrazione che l' A. segue per la *legge di saturazione* degli indici. Sostanzialmente: a_i^i è uno scalare perchè è la somma delle radici di una equazione algebrica che esprime una condizione geometrica e quindi ha significato *a priori* invariantivo.

Nel Cap. II (*Le coordinate curvilinee in geometria euclidea*) ha inizio, limitatamente per ora agli spazi euclidei, lo studio di proprietà differenziali. Riferito l' R_n euclideo a un sistema di coordinate curvilinee ($u^1, u^2, \dots u^n$) a ogni punto risulta associato un sistema cartesiano: il *riferimento naturale* (« repère naturel »): per questo il vettore unità coordinato $e_i = \dfrac{\partial M}{\partial u^i}$ nel punto M generico ($i = 1, 2, \dots n$) è la velocità di un punto che percorre la linea coordinata lungo la quale il parametro u^i solo è variabile, quando s' intenda che questo parametro rappresenti il *tempo*. Premesso quello che l' A. chiama il *teorema fondamentale della geometria metrica: tutte le proprietà geometriche dello spazio sono virtualmente contenute nel suo elemento lineare* (2), l' A. viene alla *ricostruzione*

(1) *p-vettore* è per l'A. l'ente determinato da una *p*-giacitura piana, da una grandezza scalare e da un senso d'orientazione a *p*-dimensioni: quello che SCHOUTEN chiama *einfache p-Vektor*, mentre l' (*allgemeine*) *p-Vektor* secondo SCHOUTEN dal CARTAN viene detto *sistema di p-vettori*.

(2) La semplice dimostrazione che l' A. dà per questo teorema (pp. 33-34) forse risulterebbe, concettualmente, ancora più semplificata intendendo che la *distanza di due punti* non infinitamente vicini venga definita come a pag. 64 [righe 16-17, ove certo è da leggersi: *borne inférieure* anzichè *supérieure*]: cioè, come limite inferiore della lunghezza degli archi di curva (rettificabili) che congiungono i due punti.

locale dello spazio dal suo elemento lineare, a risolvere cioè questo primo problema: dato l'elemento lineare in un sistema di coordinate curvilinee, determinare la natura di queste coordinate — il che equivale a *localizzare, rispetto al riferimento naturale relativo a un punto dato, quello relativo a un qualunque punto infinitamente vicino.* Tale localizzazione si esprimerà con formule del tipo:

$$(1)\qquad dM = \Sigma_i du^i e_i\,, \quad de_i = \Sigma_{k,r}\Gamma^k_{ir} du^r e_k :$$

e d'altra parte si dovrà avere

$$(2)\qquad e_i \times e_j = g_{ij}\,,$$

cioè: il riferimento naturale dovrà avere ovunque la grandezza e la forma imposta dall'elemento lineare ($ds^2 = g_{ij}du^i du^j$) dello spazio. Le condizioni di integrabilità della prima delle (1) e delle (2) forniscono per le Γ^k_{ir} le espressioni $\Gamma^{ir}_k = \left\{ {ir \atop k} \right\}$ (simboli di CHRISTOFFEL per g_{ij}), che risolvono il problema. A questo punto risulta del tutto naturale l'introduzione della *differenziazione assoluta* pei vettori, e quindi anche la determinazione delle equazioni differenziali per le linee rette (geodetiche, linee autoparallele) in coordinate curvilinee. L'A. mostra come queste equazioni possono anche ricavarsi dalla nota forma delle equazioni del movimento di LAGRANGE: e anzi come il teorema fondamentale della geometria metrica non sia, in sostanza, che un caso particolare del teorema fondamentale della meccanica analitica: *le proprietà meccaniche essenziali di un sistema sono virtualmente contenute nell'espressione analitica della sua forza viva.* Dopo un breve paragrafo relativo alla differenziazione assoluta dei tensori qualunque, ed agli operatori differenziali legati a un campo scalare o vettoriale, l'A. viene alla risoluzione di questo secondo problema: Trovare le condizioni necessarie e sufficienti *perchè un elemento lineare dato a priori possa essere riguardato come l'elemento lineare dello spazio euclideo,* in un conveniente sistema di coordinate. Il problema è trattato in un moto più completo e preciso di quanto solitamente non si faccia, particolarmente per quanto riguarda la *sufficienza* delle note condizioni $R_{ijhk} = 0$.

Veniamo al contenuto del Cap. III (*Gli spazi di Riemann localmente euclidei*), forse il più notevole e interessante. Chiamiamo per semplicità (secondo l'A.) *sviluppo* una *rappresentazione isometrica* di uno spazio su di un altro, e diciamo *localmente euclideo* uno spazio riemanniano se una sua porzione, opportunamente limitata, contenente uno qualunque dei suoi punti, è sviluppabile su di uno spazio euclideo. Introduciamo (nel modo già accennato: nota (2)) per un qualunque spazio riemanniano, purchè a metrica *ovunque regolare* (cioè, a ds^2 dappertutto definito positivo) la nozione di *distanza di due punti*: il che porta ad estensioni del tutto naturali delle nozioni di *sfera*, e di insieme *limitato* di punti (p. 64). Ancora: diciamo che uno spazio riemanniano, a metrica ovunque regolare, è *normale*, se in esso ogni insieme definito limitato di punti ammette almeno un punto limite. Ciò premesso, ecco alcune delle più notevoli proposizioni che l'A. stabilisce: 1) Se uno spazio riemanniano a metrica euclidea è *normale*, il suo sviluppo sullo spazio euclideo *ricopre tutto questo spazio una e una sola volta*. 2) Se lo spazio considerato è semplicemente connesso, anche inversamente, lo spazio euclideo può svilupparsi su di esso in modo da ricoprirlo tutto, e una sola volta. 3) Ma se esso non è semplicemente connesso, ogni suo punto dà luogo nello sviluppo sullo spazio euclideo *a infiniti punti*. Se diciamo *omologhi* due qualunque punti dello spazio euclideo che corrispondano allo stesso punto dello spazio riemanniano considerato, *esistono infiniti movimenti dello spazio euclideo in sè che portano ciascun punto in un punto omologo: essi formano un gruppo* (infinito discontinuo): il *gruppo di olonomia* dello spazio localmente euclideo. Oltre alla proprietà di essere *discontinuo*, tale gruppo ha un'altra proprietà fondamentale: non contiene, all'infuori dell'identità, alcuna operazione, che lasci fermo un punto dello spazio. 4) Nello sviluppo lo spazio localmente euclideo ricopre una sola volta una regione dello spazio euclideo, che risulta ad esso *biunivocamente* riferita (cioè, può inversamente essere sviluppata su di esso): tale regione può ottenersi come totalità dei punti che sono più vicini a un dato punto che ad uno qualunque dei suoi omologhi. Essa è una regione *poliedrica*, limitata da un numero finito di faccie iperpiane, (*poliedro fondamentale* relativo a quel punto). Il gruppo di olonomia ha un numero finito di operazioni generatrici: simmetrie rispetto alle faccie del poliedro fondamentale.

Con questo *la determinazione degli spazi riemanniani normali localmente euclidei è ricondotta a un problema della teoria dei gruppi*. L'A. dà, come esempio, la classificazione degli spazi normali localmente euclidei *a 2 dimensioni*. Vi sono due classi di spazi *orientabili*, pei quali il gruppo di olonomia è formato unicamente di traslazioni: il loro studio ha delle interessantissime relazioni con quello delle *funzioni analitiche semplicemente e doppiamente periodiche*, particolarmente delle *funzioni ellittiche*. Ad es. l'A. indica una molto semplice ed elegante dimostrazione del teorema fondamentale relativo all'*inversione degli integrali ellittici* che si ricava dallo sviluppo nel piano della metrica $ds^2 = \left|\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\right|^2$ ove z

è una variabile complessa ed $R(z)$ è un polinomio di 4° grado. Vi sono poi due classi di spazi *non orientabili*, pei quali il gruppo di olonomia contiene traslazioni e simmetrie.

L'A. aggiunge ancora alcune osservazioni che presentano un notevole interesse per lo studio dei fondamenti della geometria elementare. In breve: lo spazio (dappertutto) euclideo si distingue dagli spazi localmente euclidei per queste proprietà caratteristiche: 1°) che in esso per due punti non passa che un numero finito di rette [e quindi una sola]; oppure: 2°) che in esso le figure *comunque estese* godono della mobilità perfetta, cioè, sono possibili *movimenti d'insieme* dell'intero spazio in sè, che hanno il massimo grado di generalità (dipendono da $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri essenziali) mentre ad es. un *cilindro* non ammette che *scorrimenti* in sè.

Nel Cap. IV si inizia lo studio degli spazi riemanniani *a metrica qualunque*. Ho già accennato qual'è il punto di vista dal quale si pone l'A. in questo studio: egli tende ad identificare lo spazio riemanniano, nella misura del possibile, con uno spazio euclideo. La considerazione dello *spazio euclideo tangente* in un punto a uno spazio riemanniano permette di estendere a questo tutte le nozioni e le proprietà in cui interviene soltanto un punto col suo intorno del 1° ordine: ad es. la nozione di *angolo* e di *prodotto scalare* di due vettori applicati in uno stesso punto: di *elemento* di lunghezza, d'area, di volume, onde per integrazione si giungerà anche alle nozioni di lunghezza, aree, volumi di regioni finite; le nozioni di *rotore* e di *divergenza* di un campo vettoriale. Indi l'introduzione dello *spazio euclideo osculatore* permetterà la estensione delle proprietà in cui insieme ad un punto interviene il suo intorno del 2° ordine. In particolare, si può così estendere la nozione di *differenziale assoluto* di un vettore o tensore, e quindi definire — al modo di SCHOUTEN e WEYL — il trasporto per parallelismo o per equipollenza secondo LEVI CIVITA: ancora, si estende senz'altro agli spazi riemanniani qualunque tutta la teoria delle curve, delle curvature d'una superficie e delle linee di una superficie. Soltanto questa trattazione del CARTAN mostra veramente l'intima ragione d'essere del fatto che quelle teorie valgono senza essenziali differenze negli spazi riemanniani come negli spazi euclidei. Nuove proprietà si otterranno mediante lo *sviluppo* di una linea di uno spazio riemanniano su di uno spazio euclideo (s'intende che ciascun punto della linea porti con sè il riferimento naturale che il sistema di coordinate curvilinee determina in quel punto). Per questo basterà raccordare, di punto in punto, gli spazi euclidei tangenti nei punti della curva considerata in un solo spazio euclideo (ad es. quello tangente od osculatore in un punto iniziale): raccordo che sarà fatto mediante la legge del parallelismo. In sostanza si tratta di *integrare le equazioni del parallelismo* lungo quella linea. Come la determinazione dello spazio euclideo osculatore in un punto equivale a quella di un sistema coordinato *localmente cartesiano* in quel punto, così la determinazione di uno *spazio euclideo di sviluppo* lungo una linea equivale a quella di un *sistema cartesiano di Schouten* (« *geodätisch mitbewegtes Koordinatensystem* ») lungo la curva supposta. Ma di più: si può anche determinare, e in infiniti modi, uno *spazio euclideo di raccordamento* lungo la curva, tale cioè che sia osculatore in tutti i punti di essa: salvo la forma più geometrica di quella usuale, questo non è che il noto *teorema di Fermi*. La dimostrazione che ne dà l'A. è, naturalmente, assai semplice perchè egli suppone di conoscere già uno spazio euclideo di sviluppo lungo la linea supposta, cioè, di avere integrato le equazioni del parallelismo lungo quella linea. Si tratta allora, in sostanza, di un passaggio a coordinate localmente cartesiane nei punti della curva supposta, su ciascuna delle ipersuperficie geodetiche ivi ortogonali ad essa: passaggio che si compie senza integrazioni.

La considerazione dello spazio euclideo di raccordamento permette la estensione di tutte le proprietà in cui interviene una curva col suo intorno di 2° ordine: ad es. della proprietà estremale delle geodetiche dello spazio, della proprietà metrica *esterna* che caratterizza le geodetiche delle varietà subordinate, del teorema di JOACHIMSTHAL, ecc. Come applicazione particolare, l'A. svolge rapidamente gli elementi essenziali della teoria della superficie nello spazio ordinario.

Nel Cap. V (*Superficie geodetiche, l'assioma del piano e l'assioma di libera mobilità*), dopo aver introdotto le nozioni di superficie geodetica in un punto, e totalmente geodetica, e sviluppati, tra l'altro, alcuni noti teoremi (di SEVERI, di BOMPIANI, di RICCI) che vi si riferiscono, l'A. inizia una interessantissima ricerca del tutto nuova (1), che avrà poi il suo complemento nel Capitolo seguente (p. 174 e seg.) e nella Nota I. Si tratta di questo: diciamo *assioma del piano* la seguente proposizione, valida nello spazio euclideo: *per ogni punto dello spazio e tangenzialmente a ciascun elemento piano per esso passa una superficie totalmente geodetica e una sola.* Diciamo *assioma di libera mobilità* la proprietà (eventuale) per uno spazio, di *ammettere movimenti che non ne deformino le linee e che*

(1) A parte il cenno che l'A. stesso ne ha dato nel volume « *In memoriam N. I. Lobacevsky* » (vol. II, 1926).

abbiano lo stesso grado di generalità dei movimenti di uno spazio euclideo. Ebbene; il CARTAN dimostra qui — e sarebbe troppo lungo l'esporre i procedimenti in parte analitici, in parte sintetici che l'A. segue a questo scopo — che:

a) *Se uno spazio di Riemann gode della libera mobilità attorno a due suoi punti, esso soddisfa all'assioma della libera mobilità* (SCHUR);

b) *Ciascuna delle tre seguenti proprietà per uno spazio riemanniano:*

1°) *di soddisfare all'assioma di libera mobilità;*

2°) *di soddisfare all'assioma del piano;*

3°) *di ammettere rappresentazioni geodetiche sullo spazio euclideo, porta come conseguenza le due rimanenti.*

Le dimostrazioni sono svolte per $n = 3$: si estenderebbero, come osserva l'A. al caso $n > 2$ qualunque [1].

Nel seguente Cap. VI (*Geometrie non euclidee, spazio sferico, spazio ellittico, spazio iperbolico*), l'A. dimostra poi che gli spazi pei quali è valida l'una (e quindi le altre) delle tre proprietà ora accennate, sono gli spazi localmente non euclidei (a curvatura costante). Una nuova dimostrazione di questo teorema l'A. dà poi nella Nota I alla fine del volume, mettendo in evidenza come pel sussistere di esso non occorra presupporre, pei coefficienti g_{ij} dell'elemento lineare, che *l'esistenza di derivate continue del 1° ordine,* e altre condizioni poco restrittive (pag. 243), mentre la nozione di curvatura riemanniana fa intervenire, come è noto, anche delle derivate seconde. Tornando al Cap. VI: naturalmente, l'esposizione dell'ultimo teorema che ho rammentato è preceduta dallo studio degli spazi non euclidei: studio sviluppato (pei casi $n = 2$, $n = 3$) abbastanza distesamente, anche dal punto di vista topologico, partendo dalla geometria sferica (o ipersferica) e utilizzando sia la rappresentazione geodetica sul piano (o sullo spazio) euclideo e le metriche di CAYLEY, sia (pel caso $n = 2$) una nota rappresentazione conforme (nel cerchio limite). Per quanto riguarda gli spazi *localmente* non euclidei, aggiungerò che l'A. estende anche ad essi la teoria data al Cap. III per gli spazi localmente euclidei (teoria che egli ha sviluppato per una classe di spazi ancor più generale: *gli spazi dei gruppi semplici*). Anche in questo Capitolo l'A. porta alle teorie sui fondamenti della geometria elementare un notevole contributo.

Nel Cap. VII (*La curvatura riemanniana*), l'A. torna alla con-

[1] Per $n = 2$ l'assioma del piano non ha senso: che le due proprietà rimanenti si equivalgano è ben noto (teorema di BELTRAMI).

siderazione degli spazi riemanniani più generali: e svolge uno studio accurato del trasporto ciclico per parallelismo, che lo conduce a introdurre (nel modo noto) il tensore di RIEMANN-CHRISTOFFEL e la *curvatura riemanniana*. Egli si ferma poi a stabilire numerose proprietà che a questa nozione si riferiscono: per gli spazi a 2, a 3, e poi a un numero qualunque di dimensioni.

Il Cap. VIII (*Le identità di Bianchi*) contiene anzitutto un rapido cenno della teoria delle forme differenziali esterne; in particolare l'A. introduce la nozione di *derivata esterna* di una tale forma, e se ne vale per dare una semplice dimostrazione delle note *identità di Bianchi*, una generalizzazione di un teorema di POINCARÉ — in evidente relazione coi risultati di SCHOUTEN per le condizioni di integrabilità di equazioni differenziali tensoriali — e, dopo alcune profonde investigazioni sulle *curvature vettoriali*, una semplice dimostrazione del teorema di SCHUR e di una sua generalizzazione.

Infine nel Cap. IX (*Le coordinate normali di Riemann*), l'A. si vale di queste coordinate per stabilire molti notevoli teoremi e formule relativi alla curvatura riemanniana. È particolarmente interessante il paragrafo in cui l'A. si occupa delle relazioni *fra simmetria e trasporti paralleli*: va notato specialmente il seguente teorema, che è un risultato particolare di note ricerche originali dell'autore: *Se la simmetria rispetto a ciascun punto dello spazio è una isometria, il trasporto parallelo conserva la curvatura riemanniana dello spazio.*

Seguono, come Appendice, tre *Note*. Al contenuto della Nota I (*Sull'assioma del piano e le geometrie cayleyane*) ho già rapidamente accennato. La Nota II (*Sulla curvatura riemanniana lineare*) è dedicata all'introduzione di una nuova nozione che può avere interessanti applicazioni: quella appunto di *curvatura riemanniana lineare*. Questa curvatura si manifesta quando per le g_{ij} si ha, attraversando una superficie, *discontinuità della derivata normale*: essa è la somma dei coefficienti di dilatazione di un arco di curva tracciato sulla superficie quando lo si sposti normalmente alla superficie stessa (cioè in modo che ciascuno dei suoi punti descriva un elemento lineare normale) in ciascuno dei due casi. La Nota III (*Sugli spazi normali a curvatura riemanniana negativa o nulla*) contiene una interessante estensione agli spazi riemanniani normali qualunque (purchè a curvatura riemanniana ovunque negativa o nulla) della teoria sviluppata al Cap. III per gli spazi localmente euclidei, e insieme, dei risultati di una ricerca svolta nel 1898 da HADAMARD per le superficie. Tra l'altro: l'A. dimostra che ciascun punto di un tale spazio può essere raggiunto da una geodetica uscente da un dato punto, e se lo spazio è semplicemente connesso, da una sola. In quest'ultimo caso, da ogni punto P esce una e una sola geodetica Γ perpendicolare a una data geodetica γ: la lunghezza del segmento di Γ compreso tra P e γ è la *distanza* tra P e γ. Esistono coppie di geodetiche ciascuna delle quali è *asintoto* all'altra: da un punto dato esce una sola geodetica asintoto, in un dato senso, a una geodetica data.

Un breve *indice bibliografico* chiude l'interessante volume.

ENEA BORTOLOTTI

P. C. DELENS: *Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme.* Paris, Gauthier-Villars, 1927, pagine IX-182.

La bella prefazione del CARTAN (p. VII-IX) e la dettagliata descrizione che nell'Introduzione (p. 1-6), l'A. fa del contenuto di questo lavoro rendono superflua una lunga presentazione. L'A. ha qui inteso anzitutto di stabilire un ragguaglio tra i diversi metodi di ricerca, e particolarmente, fra i diversi procedimenti di *calcolo geometrico*, più o meno diretto, che, specialmente nell'ultimo decennio, sono stati saggiati per lo studio degli spazi curvi: il calcolo vettoriale e omografico italiano, con le recenti estensioni date da BURALI-FORTI e BOGGIO; il calcolo differenziale assoluto di RICCI e l'analisi diretta di SCHOUTEN: il metodo del triedro mobile di DARBOUX con le sue generalizzazioni e la teoria delle forme differenziali esterne (CARTAN).

Il calcolo geometrico di cui fa qui uso il DELENS risulta appunto da un raffronto e, fino a un certo punto, da una fusione di alcuni elementi essenziali dei diversi metodi che ora ho rammentato. Questa unificazione riesce possibile e naturale in quanto tutti questi metodi possono, in ultima analisi, farsi dipendere dalla teoria delle trasformazioni lineari, cioè, dalla geometria proiettiva. È appunto questa veduta assai generale che serve di base all'A. nel costruire il suo strumento di ricerca: e gli permette, poi, di sviluppare le geometrie *euclidea* e *conforme* delle curve e delle superficie, pur così profondamente diverse, con una trattazione unitaria, che pone in vista analogie insospettate. Opportunamente l'A. mostra dapprima in azione il suo metodo nello studio di problemi ben noti, relativi a parti classiche della geometria euclidea: ciò prepara il lettore alla lettura della parte successiva e più originale dell'opera, in cui si affrontano questioni nuove. Ad onor del vero va detto però che la molteplicità e complessità delle notazioni, la ricchezza e varietà dell'algoritmo usato — necessari d'altra parte per quel ragguaglio che l'A. si propone — e la forma assai concisa dell'esposizione rendono tale lettura alquanto faticosa.

Ciò non diminuisce il valore dell'opera, ricca di contenuto in gran parte originale, non solo pel modo di trattazione, ma anche pei risultati nuovi e per le interessanti osservazioni.

L'opera è divisa in tre capitoli. Nel Cap. I (Nozioni di calcolo geometrico) si studiano anzitutto le principali operazioni di algebra tensoriale, e particolarmente le trasformazioni lineari in uno spazio (n-dimensionale), nel quale il gruppo $G_{n,p}$ delle collineazioni unimodulari viene preso come gruppo fondamentale. Il simbolismo adottato si avvicina in un certo senso a quello di BURALI-FORTI e BOGGIO, e ha d'altra parte degli elementi a comune con quello di SCHOUTEN. Indi l'A. passa ai sottogruppi di $G_{n,p}$ che dànno le metriche di CAYLEY, le geometrie affine ed euclidea. Fatta, in modo puramente analitico, l'introduzione delle operazioni differenziali, l'A. si sofferma sul caso particolare ($n=2$) della geometria sul piano euclideo, per la quale appresta un bagaglio strumentale assai ricco e perfezionato, forse un po' troppo voluminoso in relazione alle applicazioni che ne vengono date.

L'A. viene indi a studiare (nel Cap. II) varie questioni di *geometria differenziale euclidea delle curve e superficie*. Il metodo seguito è, a parte i simboli un po' diversi, assai vicino a quello del CARTAN. Il repère mobile, dapprima del tutto arbitrario, viene, con successive particolarizzazioni, infine legato in modo intrinseco e invariante all'ente da studiare. La geometria su di una superficie viene subordinata a quella dell'ambiente euclideo, secondo LEVI-CIVITA e CARTAN, mediante la determinazione della *connessione indotta*, cioè del parallelismo superficiale. Dopo un cenno sulle condizioni di contatto, applicabilità, isomorfismo di due superficie, l'A. dà uno sviluppo nuovo pel modo di trattazione e per vari interessanti risultati, di una teoria introdotta dal RICCI, quella dei *fasci di congruenze* (secondo l'A., dei *reticoli angolari*): teoria che finora, dopo le ricerche del RICCI, che se n'è valso sistematicamente nella sua *Teoria delle superficie*, è stata poco studiata [1].

Infine il Cap. III è dedicato alla *geometria differenziale conforme delle curve e delle superficie*. La geometria conforme in R_3 euclideo viene subordinata, nel modo ben conosciuto, alla geome-

[1] L'estensione di questa teoria alle V_n è stata presa in considerazione recentemente dalla Sig.na Dott. POMPÉO (questo « Bollettino », VI, 1926, p. 125-127) e dal Prof. TONOLO (« Rendic. Istit. Lombardo », ser. 2, t. 60, 1927, p. 253-263).

tria di un S_4 proiettivo. Introdotte opportune notazioni per gli enti dello spazio di sfere, col solito metodo delle successive particolarizzazioni del riferimento (pentasfero mobile), l'A costruisce gli elementi fondamentali della geometria delle curve, e poi di quella delle superficie (mediante la *connessione indotta*), e infine, della teoria delle curve su di una superficie: giungendo per queste fino al raccordo degli invarianti propri di una curva con quelli che esso ha in relazione con la superficie su cui è tracciata. I risultati stabiliti già in parte sono stati ottenuti per altre vie da CARTAN, da THOMSEN o da altri, ma parecchi sono nuovi: relativi ad es. alla *sfera armonica* (p. 138), al *polo canonico* (p. 143), ai *cerchi indotti* di CARTAN (p. 161 e seg.), ai *reticoli angolari* e ai *complessi armonici* (p. 163-172). Il volume termina con una breve *Nota* sui *cambiamenti di connessione euclidea delle superficie*: l'A mette in evidenza come lo studio di una connessione euclidea (a torsione) qualunque in relazione con la connessione indotta dalla geometria dell'ambiente (la connessione di LEVI-CIVITA secondo CARTAN, *riemanniana* secondo SCHOUTEN) si colleghi con la sua teoria dei reticoli angolari.

ENEA BORTOLOTTI

U. CISOTTI: *Lezioni di Calcolo Tensoriale*. (Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1928, pag. VII-94).

Lo scopo che l'A. si propone in quest'opera, di carattere essenzialmente didattico, è di dare al lettore la conoscenza di quegli elementi di calcolo tensoriale che servono per le più semplici applicazioni nelle teorie fisiche, e segnatamente, nella Meccanica dei sistemi continui: e insieme, di porre in grado chi voglia approfondire questo studio di affrontare la lettura di opere maggiori. L'A. ha creduto opportuno di limitare la sua trattazione ai tensori dell'*ordinario spazio euclideo* (R_3) e di svolgerne anzitutto lo studio (come fa nei Cap. I-IV) con riferimento a *coordinate cartesiane ortogonali*; solo in un secondo tempo passando alla rappresentazione in coordinate generali (Cap. V) o in relazione a una n-pla ortogonale di congruenze (Cap. VI). Il modo di esposizione adottato è (come richiede la natura dell'opera) assai piano ed elementare, e molto dettagliato; di carattere prettamente analitico, ma avvivato da svariate applicazioni ed interpretazioni meccaniche. In complesso, l'opera riuscirà certamente utile a chi si voglia iniziare a quest'ordine di studi.

Aggiungerò pochi particolari. Alla nozione di *tensore* l'A. giunge attraverso a quella di *vettore*, e di *prodotto tensoriale* di due o più vettori. Alle generalità sui tensori è dedicato il Cap. I; nei Cap. II e III sono svolti (in coordinate cartesiane) gli elementi dell'algebra e dell'analisi tensoriale. L'A. si sofferma, più di quanto solitamente non si faccia, sulle nozioni di *divergenza* e di *rotore,* che egli introduce per campi di *tensori qualunque* di R_3. È assai interessante il Cap. IV, dedicato a varie applicazioni meccaniche (tensore degli sforzi, tensore d'inerzia; deformazioni infinitesime). Nel Cap. V si riprende dall'inizio lo studio dei tensori, ora con riferimento a coordinate generali (cioè, curvilinee) in R_3: le principali formule dell'algebra e dell'analisi tensoriale ordinaria (di RICCI) vengono qui ricavate da quelle prima stabilite pel caso delle coordinate cartesiane ortogonali. In questo modo al principiante (che non abbia vinto ancora la fobìa degli indici e delle sommatorie!) viene offerta una via certo più lunga, ma forse un po' più agevole di quella ordinaria per giungere fino alle operazioni differenziali del calcolo di RICCI.

Il Cap. VI è dedicato a quella che l'A. chiama rappresentazione *intrinseca* dei tensori (1), cioè al riferimento a una *n*-pla di congruenze ortogonali. L'A. si limita a un rapido cenno su questa rappresentazione, e in particolare, su quella che egli chiama la *derivazione intrinseca*: operazione che ha usato sistematicamente — con le sue estensioni — R. LAGRANGE dal 1922, ma che in effetto è stata esplicitamente introdotta, appunto dal prof. CISOTTI, fino dal 1918. Come *Appendice* l'A. riporta una sua conferenza divulgativa sulle nozioni di *numero, vettore* e *tensore.*

ENEA BORTOLOTTI

E. CIANI: *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici.* (Torino, S.T.E.N., 1928, pag. 267).

L'A. ristampa ora, con alcune variazioni ed aggiunte, il volume già da lui pubblicato nel 1915 con questo stesso titolo (Pisa, Spoerri) quale complemento alle sue *Lezioni di geometria proiettiva ed analitica.* Trattandosi d'opera già conosciuta, mi limiterò a poche notizie ed osservazioni. Lo scopo che l'A. si propone è di offrire « quanto è desiderabile che un giovane conosca di geometria ana-

(1) Rammenterò che la denominazione (ormai classica del resto): componenti *intrinseche* o *invarianti*, da SCHOUTEN è sostituita con quella di *componenti ortogonali*: forse preferibile in quanto tali componenti dipendono dalla scelta dell'*n*-pla di congruenze (e dell'unità di misura) proprio come le ordinarie componenti dipendono dal sistema coordinato in cui sono calcolate.

litica e proiettiva prima di accingersi ai corsi di geometria superiore ». A questo scopo l'A. qui svolge, in modo molto piano ed elementare, una trattazione (puramente analitica) del metodo delle coordinate proiettive ed omogenee e delle sue applicazioni allo studio delle proiettività e dei più elementari enti algebrici (le coppie e terne dei punti, le coniche, le cubiche piane e gobbe, le quadriche, lo spazio rigato e i suoi enti fondamentali). La trattazione è assai minuziosa, e le varie parti sono esposte con notevole uniformità di sviluppo e unità di metodo. Nello schema che l'A. si è prefisso e a cui si attiene costantemente, si inquadrano assai bene le parti aggiunte nell'attuale edizione, relative alle *forme cubiche* e agli enti geometrici che ad esso si collegano: terne di punti, cubiche piane e gobbe (Cap. III, VII, X e parte del IV). L'opera è divisa in quattro parti: le prime tre contengono gli elementi della geometria analitica e proiettiva delle forme di 1ª, 2ª e 3ª specie in coordinate omogenee, sviluppati in modo (per quanto ciò è possibile) parallelo: la quarta è dedicata allo spazio rigato, ai suoi enti lineari e ai più semplici tipi di complessi quadratici di rette (studiati mediante le coordinate p_{ik} e π_{ik} di PLÜCKER). Una piccola raccolta di Esercizi fa seguito a ciascuna delle quattro parti dell'opera.

ENEA BORTOLOTTI

P. BARBARIN: *La géométrie non euclidienne.* (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

Quest'opera è una esposizione, con indirizzo elementare, della geometria non euclidea.

Nel Cap. I l'A., a guisa d'introduzione, svolge varie considerazioni d'indole generale intercalate d'interessanti dati biografici sui fondatori della geometria non euclidea. Indi, richiamata la definizione euclidea diretta e i primi quattro postulati di EUCLIDE, passa ad esporre (Cap. II e III) come sia dossibile costruire tre sistemi geometrici d'uguale importanza, differenziantisi l'uno dall'altro per l'aggiunta ai suddetti postulati del postulato 5° o 6° di EUCLIDE: l'aggiunta del postulato 5° distingue la geometria di RIEMANN, l'aggiunta del postulato 6° la geometria di LOBATSCHEWSKY, la geometria di EUCLIDE si ottiene coll'aggiunta del 5° e 6° postulato insieme. A queste conclusioni l'A. perviene sia con metodi di riduzione all'assurdo, sia con ragionamenti diretti che riproducono quelli di EUCLIDE, LEGENDRE, LOBATSCHEWSKY e DE TILLY.

Particolarmente interessanti sono i due Capitoli dedicati alla geometria generale del piano e dello spazio. In essi l'A. mostra come molte proposizioni della geometria euclidea sono anche vere in geometria generale se opportunamente interpretate e toltene le parti sovrabbondanti.

Seguono i Capitoli dedicati alla deduzione in geometria non euclidea delle formule trigonometriche, alla costruzione di angoli a tangente, seno e coseno razionali, alla inscrizione nel cerchio dei poligoni regolari, alla determinazione delle aree e dei volumi delle figure piane e solide e alla quadratura del cerchio.

Nei due ultimi Capitoli son date le prove geometriche e analitiche dell'indimostrabilità del 5° postulato di EUCLIDE con accenni al problema della forma dell'Universo.

Chiudono l'opera alcune note di A. BUHL in cui fra l'altro vien posto a raffronto l'elettromagnetismo di MAXWELL con la geometria di CAYLEY; in una di esse dedicata alla geometria differenziale di RIEMANN è fatto cenno alla questione dell'estensione del concetto di spazi di RIEMANN che è tutt'ora in piena elaborazione per parte di varî geometri, fra cui E. CARTAN.

L'opera tutta valorizza il genio di EUCLIDE che ha saputo scegliere con tanta perspicacia i postulati fondamentali della geometria e le pazienti ricerche di LOBATSCHEWSKY, BOLYAI e RIEMANN che hanno messo in vera luce la natura di tali postulati. Anche i precursori di LOBATSCHEWSKY, BOLYAI e RIEMANN, come SACCHERI e LAMBERT sono giustamente ricordati nel corso del libro, facendo risaltare con equità l'opera loro nella fondazione della geometria non euclidea. Per il contenuto che ha tanta attinenza con la geometria elementare e per la chiara esposizione, quest'opera è degna di figurare nelle biblioteche scolastiche ad uso degli insegnanti delle scuole medie.

M. D. V.