Bollettino Unione Matematica Italiana

Pacifico Mazzoni

Su un metodo d'interpolazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.1, p. 29–39.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_29_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Su un metodo d'interpolazione.

Nota di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

1. Preliminari. — Vogliamo richiamare l'attenzione su un metodo semplicissimo d'interpolazione, di cui riteniamo conveniente una larga applicazione in pratica. Di una funzione $f(x)$ della variabile reale x, finita, continua e derivabile fin quand'occorrerà, supponiamo conosciuti i valori $f(a)$, $f(a+h)$, $f'(a)$, $f'(a+h)$: ci proponiamo di ricavare delle formole per avere i valori approssimati di $f(x)$ per ogni altro valore di x, anche fuori dell'intervallo a, $a+h$, e sopratutto di valutare gli errori che si commettono con l'uso di tali formole.

Intanto ricordiamo che se s'interpola col metodo delle parti proporzionali, per avere il valore di $f(a+k)$, si commette un errore (differenza tra il valore esatto e l'approssimato) uguale a

$$-\frac{k\cdot(h-k)}{2}\cdot f''(\xi),$$

dove ξ rappresenta un certo numero compreso tra a, $a+h$, ed $a+k$ [1].

Se si assume invece come valore approssimato di $f(a+k)$ il seguente:

$$\text{(1)}\qquad \varphi(k)=f(a)+kf'(a)+k^2\cdot\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2},$$

si commette, com'è noto, un errore

$$\text{(1)}\qquad f(a+k)-\varphi(k)=-\frac{k^2\cdot(h-k)}{3!}\cdot f'''(\xi).$$

(per il teorema generale della nota [2]).

[1] Vedi G. PEANO, *Formulario Mathematico*. (Torino, 1908).

[2] È utile ricordare il seguente noto teorema:

Se una funzione $F(x)$ *si annulla per* $x=a_1$; $x=a_2$; ....; $x=a_n$, *po-*

Il polinomio $\varphi(k)$, di 2° grado in k, si riduce ad $f(a)$ per $k=0$, mentre per $k=h$ si riduce ad $f(a+h)$, e inoltre ha la derivata $\varphi'(a)=f'(a)$. Geometricamente è rappresentato dalla parabola che tocca la curva $y=f(x)$ nel punto di ascissa a, e di nuovo la incontra nel punto di ascissa $a+h$ (²).

Analogamente, se si assume come valore approssimato di $f(a+k)$ il seguente:

$$\text{(II)} \qquad \varphi_1(k)=f(a+h)-(h-k)f'(a+h)+(h-k)^2\cdot \frac{f(a)-f(a+h)+hf'(a+h)}{h^2},$$

si commette un errore

$$\text{(2)} \qquad f(a+k)-\varphi_1(k)=\frac{k(h-k)^2}{3!}\cdot f'''(\eta).$$

Il polinomio $\varphi_1(k)$ è rappresentato invece dalla parabola che tocca la curva $y=f(x)$ nel punto di ascissa $a+h$ e passa per quello di ascissa a.

Dalle (1) e (2) risulta:

In ogni caso, se k *è compreso tra* o *e* h, *l'errore commesso con la* (I), *o con la* (II), *è minore numericamente della quantità* $\frac{2}{81}h^3\cdot M$, *dove* M *indica il massimo valor assoluto di* f''' *tra* a *e* a + h.

Infatti il massimo valore del prodotto $k^2\cdot(h-k)$, come pure del prodotto $k\cdot(h-k)^2$, è $\frac{4}{27}h^3$.

2. Valore approssimato di $f\left(a+\frac{h}{2}\right)$. — Premesse queste ovvie considerazioni, e osservato che nella (I) figura soltanto il valore di $f'(a)$, mentre nella (II) figura soltanto quello di $f'(a+h)$, cerchiamo un metodo d'interpolazione che permetta di utilizzare insieme i due valori $f'(a)$ e $f'(a+h)$.

Anzitutto cerchiamo la media aritmetica dei due valori appros-

tendo anche questi numeri essere tra loro non tutti distinti, allora si ha:

$$F(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{n!}\cdot F^{(n)}_{(\xi)},$$

essendo ξ *un certo valore intermedio tra* $x, a_1, a_2, \dots, a_n$.

S'intende che a_r si debba contare r volte, se annulla anche

$$F'(x),\ F''(x),\ \dots,\ F^{(r-1)}_{(x)}.$$

simati di $f\left(a+\frac{h}{2}\right)$ forniti rispettivamente dalla (I) e dalla (II). Si ha:

$$\text{(III)}\quad \psi\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{h}{2}\right)+\varphi_1\left(\frac{h}{2}\right)\right]=\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{h}{8}\cdot[f'(a)-f'(a+h)].$$

Dimostriamo che *se si assume come valore approssimato di* $f\left(a+\frac{h}{2}\right)$ *questo valore* (III), *si commette un errore della forma:*

$$\text{(III')}\qquad f\left(a+\frac{h}{2}\right)-\psi\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{h^4}{384}\cdot f^{\text{IV}}(\xi),$$

ove ξ *indica un certo numero compreso tra* a *ed* $a+h$.

Consideriamo infatti la frazione

$$\text{(3)}\qquad \frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-\frac{f(a)+f(a+h)}{2}-\frac{h}{8}f'(a)+\frac{h}{8}f'(a+h)}{h^4}:$$

siccome i suoi due termini si annullano entrambi per $h=0$, essa è uguale al rapporto delle derivate dei suoi due termini (rispetto ad h), calcolato in un certo punto intermedio. Il rapporto di codeste derivate è:

$$\text{(4)}\qquad \frac{\frac{1}{2}f'\left(a+\frac{h}{2}\right)-\frac{3}{8}f'(a+h)-\frac{1}{8}f'(a)+\frac{h}{8}f''(a+h)}{4h^3},$$

che a sua volta è uguale al rapporto delle derivate dei suoi due termini, calcolato in un punto intermedio. Questo secondo rapporto è:

$$\text{(5)}\qquad \frac{f''\left(a+\frac{h}{2}\right)-f''(a+h)+\frac{h}{2}f'''(a+h)}{48h^2}.$$

Ma per lo sviluppo di Taylor si ha:

$$f''\left(a+\frac{h}{2}\right)=f''(a+h)-\frac{h}{2}f'''(a+h)+\frac{h^2}{8}f^{\text{IV}}(\xi),$$

dove $a<\xi<a+h$; onde la frazione (5) è $=\frac{f^{\text{IV}}(\xi)}{384}$. Segue che la frazione (4) è uguale a $\frac{f^{\text{IV}}(\eta)}{384}$, dove $a<\eta<\xi$; e che infine la (3) è $=\frac{f^{\text{IV}}(\zeta)}{384}$. Segue allora che la differenza

$$f\left(a+\frac{h}{2}\right)-\psi\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{h^4}{384}\cdot f^{\text{IV}}(\xi). \qquad \text{c. d. d.}$$

3. Esempio. — Per esempio, supponiamo di voler eseguire l'interpolazione sulla funzione

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

che interviene nel calcolo delle probabilità. Poniamo conosciuti i valori di $\Theta(1,2) = 0,91031$ e di $\Theta(1,3) = 0,93401$, e di voler conoscere il valore di $\Theta(1,25)$. Col metodo delle parti proporzionali si ha per $\Theta(1,25)$ il valore approssimato 0.92216, mentre il valore esatto è 0,92290.

Ma se conosciamo i valori di

$$\Theta'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

allora possiamo assumere il valore (III) come valore approssimato di $\Theta(1.25)$. Siccome $\Theta'(1,2) = 0,2673$ e $\Theta'(1,3) = 0,2082$, si ottiene dalla (III) il valore 0,92290, come si vede, con 5 cifre decimali esatte.

4. Valori approssimati di $f(x)$. — Abbiamo mostrato la convenienza di servirsi della formola (III), per avere il valore approssimato di $f\left(a+\frac{h}{2}\right)$, conoscendo i valori di $f(a)$, $f(a+h)$, $f'(a)$, e $f'(a+h)$.

In generale, per avere i valori approssimati di $f(a+k)$, *per qualunque* k, *useremo il metodo seguente d'interpolazione: per* k *minore di* $\frac{h}{2}$ *sostituiremo alla curva* $y = f(x)$ *la parabola che la tocca nel punto di ascissa* a, *e che passa per il punto* (III) *(vale a dire per il punto che ha per ascissa* $\frac{h}{2}$ *e per ordinata il valore* (III)). *Invece per* k *maggiore di* $\frac{h}{2}$ *prenderemo la parabola che tocca la curva* $y = f(x)$ *nel punto di ascissa* $a+h$ *e che passa parimenti per il punto* (III).

Useremo cioè la formola (approssimata):

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} f(a+k) \backsim f(a) &+ kf'(a) + \\ &+ k^2 \cdot \frac{4f(a+h) - 4f(a) - 3hf'(a) - hf'(a+h)}{2h^2}, \end{aligned}$$

quando sia $k < \frac{h}{2}$, e la formola

$$\text{(V)} \quad \begin{aligned} f(a+k) \backsimeq f(a+h) - (h-k)f'(a+h) + \\ + (h-k)^2 \cdot \frac{4f(a) - 4f(a+h) + hf'(a) + 3hf'(a+h)}{2h^2}. \end{aligned}$$

nel caso di $k > \frac{h}{2}$.

Per $k = \frac{h}{2}$ le due formole (IV) e (V) si riducono alla (III), che scriveremo:

$$\text{(VI)} \qquad f\left(a + \frac{h}{2}\right) \backsimeq \frac{f(a) + f(a+h)}{2} + \frac{h}{8} f'(a) - \frac{h}{8} f'(a+h).$$

Si vede subito che le due parabole rappresentate dai secondi membri della (IV) e della (V) si toccano nel punto $\frac{h}{2}$; sicchè possiamo dire che veniamo a sostituire alla curva $y = f(x)$ due archi di parabole, i quali si raccordano alla detta curva nei punti a e $a + h$, e sono anche raccordate tra loro nel punto $a + \frac{h}{2}$.

Riservandoci di mostrare con numerose applicazioni la grande convenienza di questo metodo, passiamo a studiare l'errore che si commette, quando lo si applica.

5. Valutazione degli errori commessi. — *L'errore commesso con la* (IV) *(differenza tra il valore esatto e l'approssimato) è della forma:*

$$\text{(VII)} \qquad -\frac{1}{6} k^2 \cdot \left(\frac{h}{2} - k\right) f'''(\xi) + \frac{k^2 h^2}{96} f^{\mathrm{IV}}(\zeta),$$

dove ξ *indica un certo numero compreso tra* a *e* $a + \frac{h}{2}$, *e* ζ *un numero compreso tra* a *ed* $a + h$ (1).

Invece l'errore commesso con la (V) *è della forma*

$$\text{(VII')} \qquad \frac{1}{6}\left(k - \frac{h}{2}\right) \cdot (h-k)^2 f'''(\eta) + \frac{(h-k)^2 h^2}{96} f^{\mathrm{IV}}(\zeta).$$

(1) Il teorema sussiste anche se k è < 0; però allora di ξ si dovrà dire che rappresenta un numero $< a + \frac{h}{2}$. Ricordiamo che si userà la (IV) solo se k è $\leq \frac{h}{2}$, e la (V) solo se $k \geq \frac{h}{2}$.

dove η *indica un certo numero compreso tra* $a + \frac{h}{2}$ *e* $a + h$, *e* ζ *lo stesso numero che figura nella* (VII) [1].

Infatti confrontiamo la parabola (IV) (cioè rappresentata dal secondo membro della (IV)), con la parabola che tocca la curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa a e inoltre la interseca nel punto di ascissa $a + \frac{h}{2}$. Codesta seconda parabola ha per equazione:

$$(6) \qquad y(k) = f(a) + kf'(a) + 4k^2 \cdot \frac{f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f(a) - \frac{h}{2} f'(a)}{h^2}.$$

La differenza dei secondi membri della (IV) e della (6) è della forma $k^2 \cdot \varkappa$, dove $\varkappa$ è un numero che resta fisso, quando restano fissi a ed h. Per avere il valore di $\varkappa$, osserviamo che per $k = \frac{h}{2}$ la suddetta differenza diventa $= \frac{h^2}{4} \cdot \varkappa$, e d'altronde essa è uguale a $\psi\left(\frac{h}{2}\right) - f\left(a + \frac{h}{2}\right)$, che a sua volta, per la (III') del N. 2, è uguale a: $-\frac{h^4}{384} \cdot f^{IV}(\xi)$. Si ha dunque:

$$(7) \qquad \varkappa = -\frac{h^2}{96} f^{IV}(\zeta)$$

(dove ζ è compreso tra a ed $a + h$). Segue che in generale la differenza tra il valore (IV) e il valore (6) è

$$(7') \qquad k^2 \varkappa = -\frac{k^2 \cdot h^2}{96} f^{IV}(\zeta).$$

D'altra parte per il teorema della nota [2] del N. 1, la differenza tra $f(a + k)$ e il valore (6) è uguale a

$$(8) \qquad -\frac{1}{3!} k^2 \left(\frac{h}{2} - k\right) \cdot f'''(\xi).$$

dove $a < \xi < a + \frac{h}{2}$: segue che la differenza tra $f(a + k)$ e il valore (IV), ossia l'errore commesso con la (IV), è uguale alla somma (VII). Il primo teorema enunciato è dunque dimostrato.

Analogamente, per il secondo teorema.

[1] Il teorema sussiste anche se k è $> h$; però allora di ζ si dovrà dire che rappresenta un numero $> a + \frac{h}{2}$.

6. Osservazioni. — Aggiungiamo poche ovvie considerazioni.

Il valore (IV), *per* k *compreso tra* 0 *e* $\frac{h}{2}$, *è sempre compreso tra i due valori* (I) *e* (II) *del N. 1. Altrettanto dicasi del valore* (V), *per* k *compreso tra* $\frac{h}{2}$ *e* h [1].

Segue che l'errore commesso con la (IV), o la (V), è certamente inferiore (numericamente) al maggiore dei due errori commessi con la (I) e la (II); anzi sarà da aspettarsi generalmente un errore di gran lunga minore. E per l'osservazione alla fine del N. 1, si può concludere:

In ogni caso, se k *è compreso tra* 0 *e* h, *e se* M *indica il massimo valor assoluto di* $f'''(x)$ *tra* a *e* a + h, *è certo che l'errore commesso con la* (IV), *o con la* (V), *è minore di* $\frac{2}{81} h^3 \cdot M$.

7. Esempi. — Il metodo d'interpolazione indicato al N. 4, pure così semplice, dà in pratica ottimi risultati. Ritornando all'esempio del N. 3, noti i valori di $\Theta(1, 2)$, $\Theta(1, 3)$, $\Theta'(1, 2)$ e $\Theta'(1, 3)$, si deduce dalla (IV) per $\Theta(1, 23)$ il valore 0,91806, mentre il suo valore esatto è 0.91805....

Così pure, considerata la funzione e^x, noti i valori:

$$e^{4,5} = 90,01714; \quad e^{4,6} = 99,48432,$$

si ha per $e^{4,52}$ dalla (IV) il valore 92,75883, mentre il valore esatto è 92,75854....

8. Applicazione al calcolo dei radicali. — Possiamo ancora applicare questi metodi di approssimazione, per estrarre le radici r-sime. Se si considera la funzione $y = \sqrt[r]{x}$, si ha:

$$y' = \frac{1}{r\sqrt[r]{x^{r-1}}} = \frac{\sqrt[r]{x}}{rx}; \quad y'' = -\frac{(r-1)\sqrt[r]{x}}{r^2x^2}; \quad \text{ecc.}$$

[1] Basta osservare infatti che la (IV) dà valori sempre maggiori o sempre minori della (I); che per $k = \frac{h}{2}$ la (IV) dà il valore $\varphi\left(\frac{h}{2}\right)$, media aritmetica tra quelli che si deducono dalla (I) e dalla (II), e che infine la parabola (IV) incontra la parabola (II) *soltanto* nel punto di ascissa a ed in un altro punto di ascissa compresa tra $a + \frac{h}{2}$ e $a + h$.

Supposti conosciuti i valori di $\sqrt[r]{A}=a$, e di $\sqrt[r]{B}=b$, si ha:

$$h=B-A; \quad y'(A)=\frac{a}{rA}; \quad y'(B)=\frac{b}{rB};$$

e allora le (IV) e (V) del N. 4 danno per il valore di $\sqrt[r]{A+k}$ le formole approssimate seguenti:

$$\text{(VIII)} \qquad \sqrt[r]{A+k} \backsim a+\frac{ka}{rA}+\frac{k^2}{2(B-A)^2}\cdot \left\{4b-4a-\frac{3(B-A)\cdot a}{rA}-\frac{(B-A)b}{rB}\right\};$$

$$\text{(VIII')} \qquad \sqrt[r]{A+k} \backsim b-\frac{(B-A-k)b}{rB}+\frac{(B-A-k)^2}{2(B-A)^2}\cdot \left\{4a-4b+\frac{(B-A)a}{rA}+\frac{3(B-A)b}{rB}\right\};$$

la prima delle quali è da applicarsi, se $k \leq \frac{B-A}{2}$, e la seconda se $k > \frac{B-A}{2}$.

Per $k=\frac{B-A}{2}$ le due formole si riducono alla seguente:

$$\text{(9)} \qquad \sqrt[r]{\frac{A+B}{2}} \backsim \frac{a+b}{2}+\frac{B-A}{8r}\left(\frac{a}{A}-\frac{b}{B}\right),$$

ottenuta dalla (VI) del N. 4.

L'errore commesso con la (IV), dato dalla (VII), assume la forma

$$\text{(10)} \qquad -\frac{k^2\cdot(r-1)(2r-1)}{12r^3}\cdot\left\{(B-A-2k)\frac{\sqrt[r]{\xi}}{\xi^3}+\frac{(B-A)^2}{8}\cdot\frac{(3r-1)}{r}\cdot\frac{\sqrt[r]{\zeta}}{\zeta^4}\right\},$$

dove ζ e η sono certi numeri intermedi, come al N. 5.

Siccome nell'intervallo A, B la quantità $\frac{\sqrt[r]{\xi}}{\xi^3}$ è evidentemente compresa tra $\frac{\sqrt[r]{B}}{B^3}=\frac{b}{B^3}$, e $\frac{a}{A^3}$, e siccome parimenti la quantità $\frac{\sqrt[r]{\xi}}{\xi^4}$ è compresa tra $\frac{b}{B^4}$ e $\frac{a}{A^4}$, si trovano immediatamente due numeri, tra i quali sia compreso l'errore (10).

Invece l'errore commesso con la (VIII'), dato dalla (VII') del N. 5, assume la forma:

$$(11) \quad \frac{(h-k)^2(r-1)(2r-1)}{12r^3}\left\{(2k-B+A)\frac{\sqrt[r]{\zeta_1}}{\zeta_1^3}-\frac{(B-A)^2(3r-1)}{8r}\cdot\frac{\sqrt[r]{\zeta}}{\zeta^4}\right\}.$$

E se infine si applica la (9) per avere $\sqrt[r]{\frac{A+B}{2}}$, allora l'errore, dato dalla (III') del N. 2, assume la forma:

$$(12) \qquad -\frac{(B-A)^4}{384}\cdot\frac{(r-1)(2r-1)(3r-1)}{r^4}\cdot\frac{\sqrt[r]{\zeta}}{\zeta^4}.$$

In particolare, se $r=2$, e se inoltre è $b=a+1$, allora essendo $A=a^2$; $B=(a+1)^2$; $h=2a+1$, le (VIII) e (VIII') diventano:

$$(\mathrm{IX}) \qquad \sqrt{a^2+k} \backsimeq a+\frac{k}{2a}-\frac{k^2(2a+3)}{4a(a+1)(2a+1)^2};$$

$$(\mathrm{IX}') \quad \sqrt{a^2+k} \backsimeq a+1-\frac{2a+1-k}{2(a+1)}-\frac{(2a+1-k)^2\cdot(2a-1)}{4a(a+1)\cdot(2a+1)^2}.$$

la prima delle quali è da applicarsi se k è $\leq a+\frac{1}{2}$, e la seconda se $k>a+\frac{1}{2}$.

Ad esempio, per avere $\sqrt{153}$, si osservi che $\sqrt{144}=12$, e che $\sqrt{169}=13$; allora si ha: $k=153-144=9$, e dalla (IX) si deduce:

$$\sqrt{153} \backsimeq 12+\frac{3}{8}-\frac{729}{16\cdot 13\cdot 625}=12{,}36939.$$

mentre il valore esatto di $\sqrt{153}$ è 12,369316. Abbiamo trovato 4 cifre decimali esatte, cioè abbiamo raggiunta *un'approssimazione migliore di quella che si ottiene usando tavole di logaritmi a 5 cifre decimali.* Invece mediante interpolazione lineare si ottiene 12,36 [1].

[1] Non sarà inutile osservare che siccome la frazione $\frac{729}{16\cdot 13\cdot 625}=\frac{729}{130000}=0{,}00561$ .... è minore di 0,01, basta calcolarne due o tre cifre significative (561), perchè le ulteriori cifre darebbero un'approssimazione illusoria. Ora ciò può farsi anche con un *regolo calcolatore*: sicchè in pratica l'uso di tali formole approssimate richiede poca fatica.

Tale osservazione ha portata generale, poichè nella (IV) la somma dei primi due termini: $f(a)+k\cdot f'(a)$ costituisce già un primo valore approssi-

9. Continuazione e determinazione approssimata degli errori commessi. — All'ingrandire di A, o all'impiccolire di $h = B - A$, gli errori commessi evidentemente diminuiscono. Così, per avere $\sqrt{2}$, converrà partire dai valori a meno di 0,1, ovvero (il che in fondo è lo stesso), converrà cercare $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Siccome

$$14 < \sqrt{200} < 15,$$

si ha allora: $k = 200 - 14^2 = 4$; $h = 29$; e dalla (IX) si ha come valore approssimato di $\sqrt{200}$ (per eccesso) il seguente:

$$\sqrt{200} \backsimeq 14 + \frac{4}{28} - \frac{16 \cdot 31}{4 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 29^2} = 14 + \frac{1}{7} - 0{,}000702 = 14{,}1421550; \tag{13}$$

onde $\sqrt{2} \backsimeq 1{,}414215$: mentre il vero valore è $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$. Abbiamo trovato così 5 cifre decimali esatte di $\sqrt{2}$.

Ma possiamo spingere più in là il calcolo, determinando l'errore commesso, il quale sarà compreso tra i due numeri:

$$-0{,}0000208 \quad \text{e} \quad -0{,}0000146.$$

Assumendo come valore approssimato dell'errore la media aritmetica tra questi due, cioè $-0{,}0000177$, si ha come valore approssimato di $\sqrt{200}$ il seguente:

$$\sqrt{200} \backsimeq 14{,}1421550 - 0{,}0000177 = 14{,}1421373,$$

donde $\sqrt{2} \backsimeq 1{,}41421373$: come si vede, con errore inferiore a $2 \cdot 10^{-7}$.

Un'approssimazione generalmente migliore si avrà nel modo seguente: considerata la (10), siccome ξ è compreso tra a ed $a + \frac{h}{2}$ $\left(\text{se è } 0 < k < \frac{h}{2}\right)$, e ζ è compreso tra a ed $a + h$, *assumiamo come valore approssimato di* $\sqrt[r]{\xi} : \zeta^3$ *il seguente:*

$$\frac{a}{A^3} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b}{B^3} - \frac{a}{A^3}\right);$$

mato di $f(a + k)$ (quello che si otterrebbe, sostituendo alla curva $y = f(x)$ la retta tangente nel punto di ascissa a): e così nella (V) la somma dei primi due termini dà il valore approssimato che si otterrebbe sostituendovi la retta tangente nel punto di ascissa $a + h$; sicchè il terzo termine della (IV), o dalla (V), che è di secondo ordine di piccolezza rispetto al secondo, potrà calcolarsi ordinariamente con un regolo calcolatore.

e come valore approssimato di $\sqrt{\zeta} : \zeta^4$ *il seguente:*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{A^4} + \frac{b}{B^4}\right)$$

(ottenuti interpolando linearmente).

Si ha allora, nell'esempio precedente: $\sqrt{\xi} : \xi^3 \backsim 0{,}000001724$: $\sqrt{\zeta} : \zeta^4 \backsim 0{,}0000000076\,58$, e si ottiene per l'errore (10) il valore approssimato: $-0{,}00001911$, e infine si ha:

$$\sqrt{2} \backsim 1{,}41421359,$$

con errore di circa $3 \cdot 10^{-8}$.

Analogamente, se si considera l'errore (11).

Considerazioni analoghe si potranno fare in generale, quando si conoscano, o sia conveniente trovare i valori delle derivate terze e quarte di $f(x)$ nei punti a ed $a+h$: *allora si potrà migliorare l'approssimazione, determinando valori approssimati degli errori commessi con la* (IV) *e con la* (V), *per esempio assumendo come valore approssimato di* $f'''(\xi)$ *il seguente:*

$$f'''(a) + \frac{1}{4} \cdot \{f'''(a+h) - f'''(a)\},$$

come valore approssimato di $f^{IV}(\zeta)$ *il seguente:*

$$\frac{1}{2}\{f^{IV}(a) + f^{IV}(a+h)\},$$

e come valore approssimato di $f'''(\eta)$ *il seguente:*

$$f'''(a) + \frac{3}{4} \cdot \{f'''(a+h) - f'''(a)\}.$$

Bari, dicembre 1928.