Enrico Bompiani

Un invariante integrale dell'equazione di Laplace

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.1, p. 1–10.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

PICCOLE NOTE

Un invariante integrale dell'equazione di Laplace.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *L'A., osservata l'esistenza di un invariante integrale relativo ad una equazione di* LAPLACE, *caratterizza le equazioni aventi lo stesso invariante. Più in generale, per due tali equazioni poste in corrispondenza che ne conservi i sistemi coniugati, esiste un invariante integrale simultaneo (esteso a circuiti corrispondenti) di cui si dà il significato geometrico.*

1. È ben noto, attraverso gli studi di DARBOUX, KOENIGS, GUICHARD, C. SEGRE, TZITZEICA e di molti altri, come si colleghi lo studio delle equazioni di LAPLACE

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx = 0 \tag{1}$$

e quello dei sistemi coniugati (reticoli, réseaux) sopra una superficie. Assunte ad arbitrio $n+1$ soluzioni indipendenti della (1), siano $x^i(u, v)$ con $i = 1, \ldots, n+1$, come coordinate proiettive omogenee di un punto per una determinata coppia (u, v), al variare di questa il punto descrive una superficie Φ sulla quale le linee $u(dv = 0)$ e le linee $v(du = 0)$ formano un doppio sistema coniugato (cioè tale che le tangenti alle linee u, o v, nei punti di una linea v, o risp. u, appartengono ad una sviluppabile ossia inviluppano una curva o sono le generatrici di un cono).

È insito in questa interpretazione proiettiva della (1) che debbono considerarsi come equivalenti alla (1) tutte le equazioni che si ottengono da essa con le sostituzioni seguenti:

$$x = \lambda(u, v)x', \quad u = \varphi(u'), \quad v = \psi(v'), \tag{2}$$

con λ finita e diversa da zero nel campo che si considera e le φ e ψ invertibili, ma del resto arbitrarie: perchè questi mutamenti lasciano inalterata sia la superficie Φ, sia il doppio sistema coniugato su di essa.

Se si operano effettivamente queste sostituzioni si trova che sono invarianti per esse le *forme associate* alla (1)

$$hdudv \quad \text{e} \quad kdudv \tag{3}$$

ove

$$h = a_u + ab - c, \quad k = b_v + ab - c; \tag{4}$$

cioè che indicate con apici le quantità relative alla (1′) trasformata della (1) si ha

$$hdudv = h'du'dv', \quad kdudv = k'du'dv'.$$

E viceversa, soddisfatte le (5), le (1) e (1′) cui si riferiscono sono equivalenti, cioè si può sempre determinare una trasformazione (2) che faccia passare dall'una all'altra.

Tutto ciò è notissimo e dà all'interpretazione proiettiva indicata ragion d'essere: della sua opportunità fanno fede i numerosi risultati, anche puramente analitici, ottenuti con questa interpretazione.

Ma con ciò non è esaurita, a mio modo di vedere, l'interpretazione geometrica della (1); cioè non è stabilita l'equivalenza fra la (1) ed il modello geometrico scelto. Questo dipende infatti da una scelta arbitraria di un *gruppo di soluzioni* della (1) e i risultati che si ottengono operando su di esso porteranno in generale traccia del gruppo inizialmente scelto; solo quando questa traccia non esiste il risultato potrà enunciarsi relativamente alla (1) (e cioè ai suoi coefficienti) e non sarà relativo al gruppo di soluzioni considerato. In altri termini: due superficie Φ e Φ' trasformate proiettive una dell'altra soddisfano sostanzialmente alla stessa equazione (1) [cioè a meno eventualmente di una sostituzione (2)]; ma viceversa due superficie Φ e Φ' soddisfacenti alla stessa equazione [o a due equivalenti] non sono affatto, in generale, proiettivamente identiche. Occorre quindi rendersi conto delle relazioni geometriche intercedenti fra due siffatti modelli. Da questa domanda ha avuto origine la presente Nota. Si troverà che, oltre le (3), la (1) possiede un *invariante integrale* esteso ad un circuito (chiuso) della superficie; e nasce allora il problema di caratterizzare le coppie di superficie, su cui si corrispondano i sistemi coniugati, soddisfacenti ad (o integrali di) equazioni del tipo (1) con gli stessi invarianti integrali (estesi a circuiti omologhi).

Più in generale due tali equazioni o superficie hanno un invariante integrale che si determina come invariante assoluto di una proiettività individuata da una coppia di circuiti corrispondenti; il che permette fra l'altro di dare il significato geometrico di alcune forme normali per una o due equazioni del tipo esaminato.

2. Se si applicano alla (1) le trasformazioni (2), si ottengono per i coefficienti dell'equazione trasformata (1') le seguenti espressioni

$$a' = \left(a + \frac{\partial \log \lambda}{\partial v}\right)\frac{dv}{dv'}, \quad b' = \left(b + \frac{\partial \log \lambda}{\partial u}\right)\frac{du}{du'}, \tag{6}$$

sicchè risulta

$$a'dv' + b'du = adv + bdu + d \log \lambda. \tag{7}$$

Se s'integra ad un circuito chiuso comprendente un'area σ di regolarità per a, b, $\log \lambda$ si ha

$$\oint (a'dv' + b'du') = \oint (adv + bdu); \tag{8}$$

l'espressione ora scritta è quindi un *invariante integrale* della (1) rispetto alle trasformazioni (2).

L'invarianza dell'espressione (8) risulta anche immediatamente da quella delle forme associate (3); infatti è invariante la loro differenza

$$(h - k)dudv = (a_u - b_v)dudv;$$

se s'integra nel campo σ e si passa all'integrale al contorno corrispondente si ha

$$\iint_\sigma (h - k)dudv = \oint (adv + bdu). \tag{9}$$

Il procedimento prima indicato per mostrarne l'invarianza è più semplice perchè non occorre procurarsi le trasformate di a_u e b_v.

3. Conseguenza immediata è questa:

Se l'invariante integrale (8) *è nullo per qualsiasi circuito chiuso l'equazione* (1) *o il doppio sistema coniugato sopra una superficie* Φ *integrale di essa è ad invarianti uguali; e viceversa.*

Si ha qui una proprietà differenziale « in grande » caratteristica dei sistemi coniugati ad invarianti uguali.

Altre conseguenze dell'invarianza di (8) sono le seguenti.

Supposto $hk \neq 0$ (è inutile considerare l'ipotesi opposta in cui l'equazione s'integra per quadrature) consideriamo una trasformata di LAPLACE della (1) o della Φ; p. es. la trasformata « secondo le linee v », cioè soddisfatta da

$$x_1 = x_v + ax$$

essendo x un integrale qualsiasi della (1). I coefficienti della equazione trasformata sono

$$a_1 = a - \frac{\partial \log h}{\partial v}, \quad b_1 = b$$

quindi il relativo invariante integrale è

$$\oint (a_1 dv + b_1 du) = \oint (a dv + b du) - \oint \frac{\partial \log h}{\partial v} dv.$$

essendo i due integrali estesi a circuiti omologhi (cioè luoghi di punti aventi per coordinate le stesse coppie u, v) sulle due superficie trasformate di LAPLACE Φ e Φ_1.

Condizione necessaria e sufficiente per l'uguaglianza degli invarianti integrali, estesi a circuiti omologhi, è

$$\frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{cioè} \quad h = U(u) \cdot V(v).$$

Tenuto conto del modo di trasformarsi di h per cambiamenti dei parametri u, v, in loro funzioni può farsi $h = 1$. Sicchè: se e solo se gli invarianti integrali relativi ad un'equazione di LAPLACE e ad una sua (prima) trasformata estesi a circuiti omologhi sono uguali, l'equazione è riducibilo al tipo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial x}{\partial v} - x = 0.$$

Ad un tipo più particolare, in cui può farsi $b = U_1(u) \cdot V_1(v) - v$, si arriva se la uguaglianza fra gli invarianti integrali sussiste per la (1) e per le sue trasformate contigue di LAPLACE, cioè per Φ, Φ_1 e Φ_{-1}.

Si ha così una caratterizzazione invariante di questi tipi di equazioni.

Un altro tipo si può caratterizzare esigendo l'uguaglianza degli invarianti integrali relativi a Φ_1 e a Φ_{-1} (ma non a Φ) cioè con la condizione

$$\oint [(a_1 - a_{-1}) dv + (b_1 - b_{-1}) du] = \oint \left(\frac{\partial \log k}{\partial u} du - \frac{\partial \log h}{\partial v} \partial v \right) = 0.$$

Si ha per la (1) che può rendersi $hk = 1$.

4. Considieriamo ora due equazioni di LAPLACE

(1) $$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0$$

($\bar{1}$) $$x_{uv} + a x_u + \bar{b} x_v + \bar{c} x = 0.$$

e due superficie Φ e $\overline{\Phi}$ integrali di esse; si potranno immaginare sempre le due superficie riferite alla stessa piramide fondamentale. Fra le due equazioni, o fra le due superficie, si ponga una corrispondenza che conservi i loro sistemi coniugati: la corrispondenza può esser stabilita dall'uguaglianza delle coppie di valori u, v [o dal porre $u = \varphi(\overline{u})$, $v = \psi(\overline{v})$]; ma se anche ciò non fosse l'uso delle forme associate (e *non* degli invarianti *relativi* h, k) e dell'invariante integrale ci risparmierebbe il cambiamento dei parametri u, v in loro funzioni.

Supporremo l'ambiente delle due superficie di dimensione ≥ 5, e le superficie Φ e $\overline{\Phi}$ poste in modo che i piani tangenti in punti corrispondenti non s'incontrino (il che può sempre farsi sostituendo p. es. ad una superficie una sua trasformata proiettiva).

Consideriamo la congruenza di rette congiungenti coppie di punti corrispondenti come x e $\overline{x}$: e chiamiamo per brevità *rigate caratteristiche* di essa le rigate contenenti le linee u (rigate u; $dv = 0$) o le linee v di Φ e di $\overline{\Phi}$.

5. Domandiamoci se esistono nella congruenza superficie su cui le rigate caratteristiche seghino un doppio sistema coniugato.

Posto $\xi^i = \rho(u, v)x^i + \overline{x}^i$ se si vuol determinare, se è possibile, ρ in modo che le ξ^i risultino integrali di un'equazione del tipo

$$\xi_{uv} + \alpha\xi_u + \beta\xi_v + \gamma\xi = 0 \tag{10}$$

essendo x^i e $\overline{x}^i$ integrali di (1) e ($\overline{1}$). Fatte le sostituzioni nella (10) si trova:

$$(-a\rho + \rho_v + \alpha\rho)x_u + (\alpha - \overline{a})\overline{x}_u + (-b\rho + \rho_u + \beta\rho)x_v + (\beta - \overline{b})\overline{x}_v +$$
$$+ \{(\gamma - c)\rho + \alpha\rho_u + \beta\rho_v + \rho_{uv}\}x + (\gamma - \overline{c})\overline{x} = 0$$

che, data l'indipendenza dei piani tangenti in x e $\overline{x}$, e dovendo esser identicamente soddisfatta, dà

$$\alpha = \overline{a}, \quad \beta = \overline{b}, \quad \gamma = \overline{c}, \quad a - \overline{a} = \frac{\partial \log \rho}{\partial v}, \quad b - \overline{b} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u} \tag{11}$$

$$\rho_{uv} + \overline{a}\rho_u + \overline{b}\rho_v + (\overline{c} - c)\rho = 0. \tag{12}$$

Le ultime due delle (11) esigono che sia $\overline{a}_u - \overline{b}_v = a_u - b_v$ cioè

$$\overline{h} - \overline{k} = h - k$$

[o in forma invariativa, se la corrispondenza è data da $u = \varphi(\overline{u})$, $v = \psi(\overline{v})$

$$\oint(a dv + b du) = \oint(\overline{a}d\overline{v} + \overline{b}d\overline{u}) \quad]: \tag{13}$$

se ciò accade la (12) si scrive $h = \overline{h}$ e per la (13) è $k = \overline{k}$.

Si può fare allora $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$ (p. es. con una opportuna normalizzazione delle $\bar{x}$, lasciando inalterate le x) e si ha $\rho =$ costante del resto qualsiasi. Cioè:

Siano date in S_n, $n \geq 5$, *due superficie* Φ *e* $\bar{\Phi}$ *possedenti ciascuna un doppio sistema coniugato e una corrispondenza fra esse che conservi i sistemi coniugati (e i piani tangenti in punti corrispondenti siano indipendenti). Sulla congruenza di rette congiungenti coppie di punti corrispondenti* **non** *esiste in generale alcun' altra superficie possedente un doppio sistema coniugato (necessariamente riferito a quelli di* Φ *e* $\bar{\Phi}$ *da rette della congruenza). Se esiste una tal superficie ne esistono* ∞^1 *e punteggiano proiettivamente le generatrici della congruenza.*

Ciò avviene se e solo se le superficie Φ *e* $\bar{\Phi}$ *di partenza sono integrali di una stessa equazione di Laplace (o di due equivalenti), cui soddisfano anche le superficie determinate.*

Il teorema precedente dà quindi il criterio richiesto per riconoscere geometricamente il fatto ora segnalato.

6. Le osservazioni ora fatte si collegano ad altre più generali. Consideriamo ancora la congruenza delle congiungenti punti omologhi (come x e $\bar{x}$) delle superficie Φ e $\bar{\Phi}$ integrali delle (1) e ($\bar{1}$).

Le rigate caratteristiche segano sopra una generica superficie tracciata nella congruenza un doppio sistema o reticolato di curve u, v che, per quanto s'è visto, non costituiscono un doppio sistema coniugato se (1) e ($\bar{1}$), come vogliamo supporre, non sono equivalenti. Una maglia (infinitesima) del reticolato individua perciò un S_3 (quello di tangenti in punti infinitamente vicini di una curva v a curve u, o viceversa). Se P è il vertice della maglia appartenente alla generatrice $g = x\bar{x}$ lo S_3 relativo *non* contiene in generale g: è possibile determinare superficie tali che il detto S_3 relativo al suo generico punto P contenga la generatrice g per esso? Impostata la questione come al n.° precedente deve risultare, in luogo della (10), $\xi_{uv} + \alpha\xi_u + \beta\xi_v$ combinazione lineare omogenea di x e $\bar{x}$; ciò dà $\alpha = a$, $\beta = \bar{b}$ e, per determinare ρ,

$$a - \bar{a} = \frac{\partial \log \rho}{\partial v}, \quad b - \bar{b} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u};$$

cioè dev'essere $h - k = \bar{h} - \bar{k}$.

Ricordando la forma invariantiva, data in (13) di questa condizione quando la corrispondenza fra Φ e $\bar{\Phi}$ non sia rappresentata dall'uguaglianza di parametri, si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due equazioni di Laplace (1) *e* ($\bar{1}$) *fra le quali sia posta una corrispondenza* $u = \varphi(\bar{u})$,

$v = \psi(\bar{v})$ *abbiano uguali gli invarianti integrali estesi a circuiti corrispondenti*

$$(14) \qquad \oint (adv + bdu) = \oint (\bar{a}d\bar{v} + \bar{b}d\bar{u})$$

è che, prese due qualsiansi superficie Φ *e* $\bar{\Phi}$ *integrali di esse sulla congruenza delle congiungenti si possono trovare (una e quindi) infinite superficie tali che in ogni punto* P *di una di esse lo* S_3 *contenente la maglia avente vertice in* P *e formata dalle linee* u, v *contenga pure la generatrice per* P *della congruenza.*

Se ciò accade le ∞^1 *superficie costruite punteggiano proiettivamente la congruenza.*

In tal caso, fissata per es. la (1), si possono normalizzare le $\bar{x}$ in modo che risulti $\bar{a} = a, \bar{b} = b$: ciò equivale geometricamente a far sì che le superficie trovate siano rappresentate da $\rho =$ costante.

7. Nel caso generale, cioè in cui gli invarianti integrali riferenti a circuiti omologhi di (1) e ($\bar{1}$) non siano uguali, non esistono superficie aventi la proprietà voluta: ma la congruenza delle rette congiungenti coppie di punti corrispondenti dà luogo ancora a configurazioni geometriche interessanti.

Si faccia per brevità di discorso, e com'è sempre possibile, $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ in punti corrispondenti e si consideri su Φ e $\bar{\Phi}$ una maglia infinitesima [avente per vertici (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$, $(u + du, v + dv)$] e le rette congiungenti vertici corrispondenti. Queste quattro rette (infinitamente vicine) determinano, poichè appartengono ad un S_5, una varietà algebrica del 3° ordine V_3^3 luogo dei piani ad esse appoggiate: e questi, com'è noto, punteggiano proiettivamente quelle generatrici. A ciascuna generatrice della congruenza rimane quindi associata una V_3^3 e ad ogni suo punto un piano.

Consideriamo una rigata caratteristica, p. es. $v =$ cost., ed un punto P di essa: il piano relativo a P taglia la generatrice infinitamente vicina in un punto P': a partire da questo si ripeta la stessa costruzione e così via: si avrà sulla rigata una ben determinata curva passante per P. Al variare di P sulla generatrice cui appartiene si hanno sulla rigata ∞^1 curve punteggianti proiettivamente le sue generatrici. Se poi si varia la rigata, si hanno ∞^2 curve distribuite sulle rigate $v =$ cost.; e un analogo sistema di ∞^2 curve si ha sulle rigate caratteristiche $u =$ cost. Cerchiamone le equazioni differenziali.

Se $\xi = \rho x + \bar{x}$ descrive una di queste curve sopra una rigata $v =$ cost. la tangente (ξ, ξ_u) deve stare in uno S_4 con le generatrici della congruenza corrispondenti ai valori $(u, v+dv)$ e $(u+du, v+dv)$ cioè anche i punti $\xi, \xi_u, x+x_v dv, \overline{x}+\overline{x}_v dv, x_u+x_{uv}dv, \overline{x}_u+\overline{x}_{uv}dv$ devono stare in uno S_4. Tenuto conto delle espressioni di $x_{uv}, \overline{x}_{uv}$ questa condizione si traduce nell'altra

$$\rho_u/\rho = b - \overline{b} \tag{15}$$

che è l'equazione differenziale cercata delle linee definite sulle rigate $v = \text{cost.}$

Analogamente si ha l'equazione differenziale delle linee definite sulle rigate $u = \text{cost.}$

$$\rho_v/\rho = a - \overline{a}. \tag{16}$$

Chiamiamo *linee caratteristiche della congruenza* quelle del doppio sistema ∞^2 ora introdotto. Risulta:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le ∞^2 linee caratteristiche dei due sistemi si possono distribuire sopra ∞^1 superficie (o, in altri termini, affinchè gli ∞^2 piani delle ∞^2 V_3^3 associate alla congruenza siano tangenti ad ∞^1 superficie) è che, in forma invariantiva, risulti

$$\oint(a dv + b du) = \oint(\overline{a} dv + \overline{b} du). \tag{14}$$

Indipendentemente da quest'ultima condizione, e riferite le (1) e $(\overline{1})$ alle stesse variabili u, v, le (15) e (16) ci danno il significato geometrico di alcune normalizzazioni. Se si normalizzano le x (o le $\overline{x}$; basta uno dei due sistemi) in modo che $a = \overline{a}$ le curve caratteristiche sulle rigate $v = \text{cost.}$ hanno per equazione $\rho = \text{cost.}$; analogamente s'interpreta la normalizzazione per cui $b = \overline{b}$. Non esiste una normalizzazione per cui $a = \overline{a}$ e $b = \overline{b}$ se non è soddisfatta l'ultima condizione.

8. Le considerazioni fatte ci mostrano che due equazioni (1) e $(\overline{1})$ poste in qualsiasi corrispondenza $u = \varphi(\overline{u})$, $v = \psi(\overline{v})$ hanno un invariante integrale simultaneo

$$\oint(a dv + b du) - \oint(\overline{a} d\overline{v} + \overline{b} d\overline{u}); \tag{17}$$

o in termini geometrici che data una corrispondenza fra due superficie Φ e $\overline{\Phi}$ che conservi i loro sistemi coniugati la congruenza delle congiungenti coppie di punti corrispondenti ha l'invariante precedente. Il suo annullarsi è già stato caratterizzato geometricamente. Vogliamo trovarne il significato anche quando non sia nullo. Facciamo, come si può, $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$.

Consideriamo perciò una curva $\mathfrak{C}$ tracciata su Φ (o su $\overline{\Phi}$) e sia $x(u, v)$ un suo punto, e $P = \rho_0 x + \overline{x}$ un punto della generatrice della congruenza per esso. Se dal punto $x(u, v)$ passiamo al punto $x(u + du, v + dv)$ su $\mathfrak{C}$ spostiamo P facendogli descrivere un elemento di curva caratteristica da (u, v) a $(u + du, v)$ e poi un altro elemento di curva caratteristica da (u, o) a $(u + du, v)$ e poi un altro elemento di caratteristica da $(u + du, v)$ a $(u + du, v + dv)$; si arriverà ad un punto $P' = \rho' x(u + du, v + dv) + \overline{x}(u + du, v + dv)$ per il quale, a norma delle (15) e (16) è

$$\rho' - \rho_0 \{ 1 + (a - \overline{a})dv + (b - \overline{b})du \}.$$

Così operando ad ogni curva $\mathfrak{C}$ tracciata su Φ corrisponde, sulla rigata della congruenza contenente $\mathfrak{C}$ una ben determinata curva passante per un punto P inizialmente fissato su di essa.

Se $\mathfrak{C}$ è chiusa, quando il punto variabile su di essa ritorna al punto di partenza, il punto mobile sull'altra curva non ritorna alla posizione iniziale P ma ad una nuova posizione $P_1 = \rho_1 x + \overline{x}$, sulla stessa generatrice per P tale che

$$\log \rho_1/\rho = \oint \{ (a - \overline{a})dv + (b - \overline{b})du \}.$$

Questo è il logaritmo del birapporto dei punti $P_1 P$ e dei punti ove la loro congiungente incontra Φ e $\overline{\Phi}$; esso non dipende affatto dalla posizione iniziale P e nemmeno dalla generatrice che si considera, purchè incidente $\mathfrak{C}$. Se ne conclude:

Un circuito chiuso su Φ (o il corrispondente su $\overline{\Phi}$) individua su ciascuna generatrice della congruenza che lo incontri una proiettività, il cui invariante assoluto, indipendente dalla generatrice (e dipendente soltanto dal circuito) vale

$$\oint_{\mathfrak{C}} \{ (a-\overline{a})dv + (b-\overline{b})du \}.$$

È così pienamente determinato il significato proiettivo dell'invariante in esame.

9. Ne risulta in particolare il significato dell'invariante integrale (8) relativo ad una equazione (1). Basterà associare ad essa, come equazione $(\overline{1})$, la $x_{uv} = 0$; e poichè è in nostro arbitrio il modello geometrico $\overline{\Phi}$ di questa, possiamo sceglierlo nel modo più semplice prendendo come immagini delle linee u e v due fasci di rette in un medesimo piano. Al risultato può darsi allora la forma seguente:

Data una superficie Φ integrale di (1), si rappresentino le linee *del doppio sistema coniugato* (u = cost. *e* v = cost.) *su due fasci di rette, e si consideri come prima la congruenza delle congiungenti coppie di punti corrispondenti. Un circuito chiuso del piano determina, su qualunque generatrice della rigata della congruenza che lo contiene, una proiettività che ha per logaritmo dell' invariante assoluto l'invariante integrale* (8).

È forse interessante notare che alla condizione (14) può darsi un aspetto topologico: essa è soddisfatta se e solo se ad un circuito chiuso su Φ (o su $\overline{\Phi}$) corrispondono (nel senso fissato al n. 8) circuiti chiusi sulla rigata della congruenza che lo contiene.

Un altro significato geometrico dell' invariante (8) risulta in modo evidente per quanto s'è detto dall' associare alla (1) come equazione $(\overline{1})$ la sua *equazione aggiunta*.

Roma, novembre 1928.