BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURO PICONE

Nuova generalizzazione del teorema di Féjer sulle serie di Fourier

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 8 (1929), n.1, p. 17–20.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_17_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

Nuova generalizzazione del teorema di Féjer sulle serie di Fourier.

Nota di MAURO PICONE (a Napoli).

Sunto. - Nella sola ipotesi della sommabilità lebesghiana di una funzione reale $f(x)$ si stabiliscono nuove limitazioni per gli estremi dell'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione di Féjer della serie di Fourier della $f(x)$. Se ne deduce, per esempio, che in un punto in cui $f(x)$ è divergente positivamente l'insieme delle somme parziali della serie di Fourier della $f(x)$ non è superiormente limitato.

La funzione reale $f(x)$ della variabile reale x sia definita nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e vi sia sommabile. Per ogni valore di x esistono un determinato numero intero ν (positivo, negativo o nullo) ed un determinato valore x' dell'intervallo $(0, 2\pi)$ aperto a destra, per i quali si ha

$$x = 2\nu\pi + x';$$

ponendo

$$F(x) = f(x'),$$

si viene a definire sull'intero asse reale una funzione $F(x)$, periodica e di periodo 2π , che diremo dedotta dalla $f(x)$ *periodandola*. Porremo:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sigma_n(x) = (s_1 + s_2 + \dots + s_n) / n,$$

$$\lim'_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s'(x), \quad \lim''_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s''(x),$$

$$\lim'_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma'(x), \quad \lim''_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma''(x) \quad (1).$$

(1) Seguendo le notazioni del mio libro: *Lezioni d'Analisi infinitesimale* [Circolo matematico di Catania, Catania (R. Università), vol. I] indico con $\lim'$ e $\lim''$ rispettivamente il minimo e il massimo limite.

Si ha, com'è noto e facile vedere.

$$(1) \quad s'(x) \leq \mu'(x) \leq \mu''(x) \leq s''(x) \quad (1).$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \mu_n(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{1 - \cos [n(x - z)]}{1 - \cos (x - z)} dz = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} F(z) \frac{1 - \cos [n(x - z)]}{1 - \cos (x - z)} dz = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_x^{x+\pi} [F(z) + F(2x - z)] \frac{\operatorname{sen}^2 [n(x - z)/2]}{\operatorname{sen}^2 [(x - z)/2]} dz, \end{aligned}$$

e, comunque si fissi una quantità positiva $\sigma (\leq \pi)$,

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n\pi} \int_x^{x+\sigma} \frac{\operatorname{sen}^2 [n(x - z)/2]}{\operatorname{sen}^2 [(x - z)/2]} dz \right) &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2n\pi} \int_x^{x+\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 [n(x - z)/2]}{\operatorname{sen}^2 [(x - z)/2]} dz &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Ciò posto, si può immediatamente dimostrare il teorema:

I. *Comunque si definisca una funzione $f(x)$ sommabile nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e comunque si scelga un insieme N di punti dell'asse x , di misura nulla, detto CN l'insieme complementare di N , gli estremi $\mu'(x)$ e $\mu''(x)$ dell'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione di Féjer della serie di Fourier della $f(x)$, sono sempre compresi fra i limiti (finiti o infiniti).*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \quad (\text{su } CN), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \quad (\text{su } CN),$$

per ogni punto x_0 interno all'intervallo $(0, 2\pi)$, e fra i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2\pi - x)}{2} \quad (\text{su } CN), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2\pi - x)}{2} \quad (\text{su } CN),$$

per entrambi gli estremi 0 e 2π .

Il teorema sarà completamente dimostrato se, considerando la

(1) Cfr. le generali considerazioni che trovansi al riguardo nella mia memoria: *Sui metodi di sommazione delle serie* [« Annali di matematica pura ed applicata », tomo II della serie IV (1924-1925), pp. 263-295].

funzione $F(x)$, dedotta dalla $f(x)$ periodandola, faremo vedere che per ogni punto x_0 dell'asse x si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) + F(2x_0 - x)}{2} \text{ (su } CN) \leq \varphi'(x_0),$$

$$\varphi''(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) + F(2x_0 - x)}{2} \text{ (su } CN).$$

Limitandoci a considerare il minimo limite di $F(x) + F(2x_0 - x)$, basterà stabilire, supposto diverso da $-\infty$, che, comunque si fissi un numero finito λ verificante la relazione

$$(4) \quad \lambda < \lim_{x \rightarrow x_0} [F(x) + F(2x_0 - x)] \text{ (su } CN),$$

si ha sempre

$$(5) \quad \frac{\lambda}{2} < \varphi'(x_0).$$

In virtù della (4) si può trovare un numero positivo $\varepsilon (\leq \pi)$ tale che riesca

$$\lambda < F(x) + F(2x_0 - x), \quad \text{per } x \text{ in } CN \quad \text{e per } 0 < |x - x_0| < \varepsilon,$$

se ne trae, dalla (2),

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_0) &= \frac{1}{2n\pi} \int_{x_0}^{x_0+\pi} [F(z) + F(2x_0 - z)] \frac{\sin^2 [n(x_0 - z)/2]}{\sin^2 [(x_0 - z)/2]} dz + \\ &+ \frac{1}{2n\pi} \int_{x_0+\pi}^{x_0+2\pi} [F(z) + F(2x_0 - z)] \frac{\sin^2 [n(x_0 - z)/2]}{\sin^2 [(x_0 - z)/2]} dz > \\ &> \frac{\lambda}{2n\pi} \int_{x_0}^{x_0+\pi} \frac{\sin^2 [n(x_0 - z)/2]}{\sin^2 [(x_0 - z)/2]} dz - \frac{1}{2n\pi \sin^2(\varepsilon/2)} \int_0^{2\pi} f(z) dz, \end{aligned}$$

donde, ove si tenga conto della (3), passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si deduce la (5).

2. Il teorema dimostrato che, ovviamente, contiene come caso particolare il classico teorema di FÉJER⁽¹⁾, ha, ove si tenga conto delle (1), i seguenti corollari.

(1) Nel periodo fra l'invio del manoscritto di questa nota e il ricevimento delle bozze è apparsa la magistrale opera di TONELLI sulle *Serie trigonometriche* nella quale, a pag. 173, trovasi già una generalizzazione del teorema di FÉJER, dello stesso tipo di quella fornita dal teorema del testo, in questa contenuta.

II. La serie di Fourier della $f(x)$, sommata al modo di Féjer, ha sempre una somma determinata di valore $+\infty$ (di valore $-\infty$) anche in ogni punto x_0 dell'intervallo $(0, 2\pi)$ ove $f(x)$ è divergente positivamente (negativamente) e in ogni punto x_0 ove $f(x)$ è divergente positivamente (negativamente) a destra o a sinistra ed è limitata inferiormente (superiormente) in un intorno sinistro o destro del detto punto (1).

III. La serie di Fourier della $f(x)$ non è mai convergente, al modo ordinario, in ognuno dei punti x_0 considerati nel teorema precedente, e precisamente l'insieme delle somme parziali $s_1, s_2, \dots$ vi ha per estremo superiore $+\infty$ (per estremo inferiore $-\infty$).

IV. Se in un punto x_0 dell'intervallo $(0, 2\pi)$ la serie di Fourier della $f(x)$, sommata al modo ordinario, ha una determinata somma (finita o infinita), questa, comunque si scelga l'insieme N di misura nulla, riesce sempre compresa fra le quantità

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \text{ (su } (N)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \text{ (su } (N)).$$

3. Naturalmente, con analoga dimostrazione, le stesse relazioni stabilite dal teorema I si trovano per gli estremi dell'intervallo d'indeterminazione del procedimento di sommazione di POISSON della serie di FOURIER, dati dai limiti

$$\left. \begin{aligned} p'(x) &= \lim_{\varphi \rightarrow 1} \\ p''(x) &= \lim_{\varphi \rightarrow 1} \end{aligned} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1 - \varphi^2}{1 + \varphi^2 - 2\varphi \cos(x - x)} dx, \quad 0 < \varphi < 1.$$

laddove (cfr. la mia citata Memoria sui metodi di sommazione delle serie) si ha sempre

$$s'(x) \leq p'(x) \leq p''(x) \leq s''(x).$$

E mi è sommamente grato poter dire che alla rapida analisi qui compiuta mi è venuto fatto di pensare nell'esame della tesi di laurea assegnata ad un mio scolaro per un nuovo studio dell'integrale di POISSON, svolta sotto la direzione del Prof. CACCIOPOLI.

Napoli, li 5 novembre 1928, anno VII.

(1) Qui, naturalmente, per intorno destro del punto 2π intendo un intorno destro del punto zero e per intorno sinistro di questo un intorno sinistro del primo.