Bollettino
Unione Matematica
Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Beniamino Segre, Giuseppe Usai, T. Levi-Civita, U. Broggi, Francesco Sbrana, Ettore Cavalli, Alessandro Terracini, Bruno Finzi, Giacomo Furlani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.5, p. 248–260.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_248_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

BENIAMINO SEGRE: *Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di* S_4, *e una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario.* (« Memorie R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. II, 1927).

Presa in S_4 una quadrica Q priva di punti doppi, esistono delle piramidi inscritte in Q le cui faccie toccano Q. La polarità rispetto a Q muta una piramide siffatta in un'altra piramide, che ancora è inscritta e circoscritta a Q. La coppia di piramidi che così si ottiene, è mutata in sè da un notevole *gruppo di omografie di* S_4, e determina una configurazione che è in istretta relazione con quella dei punti e piani singolari di una V_3^3 di SEGRE.

Da essa l'A. deduce altre configurazioni di rette nello spazio ordinario, e di cerchi nel piano.

— — *La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface.* (« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », t. 481, 1927).

L'A. espone un nuovo metodo — basato sulla considerazione delle superficie cubiche osculatrici — con cui si può studiare dal punto di vista *proiettivo l'intorno di un punto* su di una superficie dello spazio ordinario.

— — *Sur les transformations des réseaux* R. (Ibid.).

L'A. dimostra che una trasformazione di JONAS di una rete R, può sempre (ed in infiniti modi) decomporsi nel prodotto di due trasformazioni di FUBINI.

— — *Les systèmes conjugués et autoconjugués d'espèce* ν, *et leur transformation de Laplace.* (« Annales de l'Éc. Norm. Sup. », t. 44, 1927).

In questa memoria, la classica trasformazione di LAPLACE degli ordinari sistemi coniugati, vien generalizzata ai sistemi coniugati di BOMPIANI (di specie ν qualunque), ed ai sistemi autoconiugati di specie superiore, che vengon studiati diffusamente.

In tal guisa si ottiene un metodo d'integrazione di certe *equazioni a derivate parziali* di ordine $\nu + 1$ comunque elevato, che dall'A. vengon chiamate equazioni $\mathfrak{L}$ di specie ν.

— — *Les systèmes conjugués de 2e espèce en involution, ou grilles.* (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 1928).

In questo lavoro vengono caratterizzate le superficie non rigate, che appartengono alla V_3 riempita dalle rette di una congruenza di un iperspazio.

Come applicazione, l'A. determina nello spazio ordinario le congruenze di rette le cui sviluppabili segnano su d'una superficie le curve di un dato sistema (anche non coniugato); introduce 5 invarianti proiettivi di una qualunque superficie di S_5, dei quali studia il significato geometrico; dimostra infine che l'integrazione di certi sistemi di equazioni a derivate parziali in involuzione può ricondursi all'integrazione di una sola equazione di LAPLACE.

— — *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti.* (« Memorie R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. II, 1928).

Le tangenti di una curva irriducibile e appartenente ad S_r, non possono stare in più di $\binom{r-1}{2}$ complessi lineari di rette linearmente indipendenti. L'A. dimostra che per $r > 3$ questo massimo vien raggiunto solo dalle *curve razionali normali*. Ciò gli permette di caratterizzare invariantivamente le g_n^r tracciate su d'una curva algebrica, tali che l'insieme dei gruppi jacobiani delle g_n^1 estratte, costituisce da solo una *serie lineare*.

— — *Le congruenze* K *e la trasformazione* F *delle superficie dello spazio ordinario.* (« Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo », t. 52, 1928).

Date nello spazio ordinario due superficie S e Σ, riferite in una corrispondenza che conservi i sistemi coniugati, se S è una falda focale della congruenza delle rette congiungenti punti omologhi delle due superficie, senza che Σ ne sia l'altra falda focale, l'A. dice che Σ *è una trasformata* F *della superficie* S, e che la congruenza suddetta (che risulta di tipo particolare) è *della specie* K. Ciò premesso, egli risolve i seguenti due problemi:

1° Data una superficie S, determina tutte le congruenze della specie K che l'hanno come falda focale, e le superficie Σ trasformate F della S.

2° Studia le congruenze K che ammettono *infinite* superficie coniugate, trasformate F di una loro falda focale. Fra queste vi sono le note congruenze R (le quali son le sole congruenze K che sieno in pari tempo congruenze W), ed altri due nuovi tipi di congruenze — dipendenti rispettivamente da una e da cinque funzioni arbitrarie di un argomento — che l'A. studia sommariamente.

— — *Sobre algunas representaciones reales del plano complejo.* (« Revista Matematica Hispano-Americana », 1928).

L'A. ricorda alcune note rappresentazioni reali del piano complesso, e le studia in relazione alle *curve analitiche del piano complesso,* di cui caratterizza le superficie rappresentative.

— — *Sui moduli delle curve poligonali, e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann.* (« Mathematische Annalen », 1928).

In questo lavoro l'A. stabilisce che le curve ν-gonali (ossia contenenti una g_ν^1), di genere $p > 1$ $\left(\text{con } \nu < \frac{p}{2} + 1\right)$, dipendono da $2p + 2\nu - 5$ moduli, e completa il teorema di esistenza di Riemann, nel modo seguente:

Di una funzione $y(x)$ algebrica irriducibile a $\nu(\geq 3)$ rami, di genere p, si possono scegliere ad arbitrio gli $\omega = 2\nu + 2p - 2$ punti di diramazione (semplici) e le trasposizioni ad essi relative, purchè il gruppo di queste trasposizioni sia transitivo ed il loro prodotto sia l'identità. Una tale funzione è definita a meno di trasformazioni birazionali. *Se gli ω punti di diramazione sono generici, e se è $\nu \leq p + 2$, il legame algebrico fra y ed x, ha, nelle due variabili, un ordine che non può discendere al di sotto di $\frac{1}{2}(p + \nu + 2)$; mentre esso può, a piacere, raggiungere un qualsiasi valore intero non inferiore a detto limite.*

Questa proposizione permette di assegnare certi modelli piani *minimi* e *normali* per le curve ν-gonali.

Giuseppe Usai: *Sul triangolo di Tartaglia generalizzalo e sulle funzioni Aleph di Wronski.* (« Atti dell'Accademia Gioenia, Catania », volume XV).

Vien data un'espressione originale delle funzioni Aleph (formate coi numeri naturali da 1 a n) mediante gli elementi di un triangolo aritmetico, caso particolare di altri triangoli pure notevoli. Tale ricerca venne inspirata da problemi di Matematica Finanziaria.

— — *Sui triangoli aritmetici e su una equazione di Fuchs.* (« Atti dell'Accademia Gioenia, Catania », volume XV).

L'Autore continua le ricerche sopra i suoi triangoli e perviene ad identità notevoli le quali si collegano a questioni relative ad operatori differenziali, e ad equazioni di FUCHS.

— — *Sul valore attuale di una rendita posticipata e temporanea.* (« Giornale di Matematica Finanziaria, Torino », 1928).

I risultati delle note precedenti vengono applicati alle rendite a termini 1^r, 2^r,...., n^r ed allo studio di un'equazione differenziale il cui integrale generale è esprimibile mediante funzioni di significato finanziario.

— — *Matematica e Calcolo delle probabilità.* (« Annuario del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali » di Catania per l'anno Accademico, 1927-1928).

Discorso inaugurale tenuto dall'Autore il 22 novembre 1927. (Anno VI).

— — *Riflessioni sull'opera: Antonio Fais* – Pagine autobiografiche. (« Estratto dal Fascicolo II dell'Annata XXIV (Anno 1928) del « Bollettino di Matematica »).

Viene in tal modo illustrata l'autobiografia (Stamperia della L. I. S., Sassari, 1925) del professor ANTONIO FAIS, benemerito della scuola, della scienza, della vita.

— — *Sulla probabilità nelle prove ripetute.* (« Atti dell'Accademia Gioenia, Catania », volume XVI).

Iu tale nota sono risolte alcune questioni sulle probabilità massime, mediante l'uso di procedimenti non infinitesimali, come è richiesto dalla discontinuità delle variabili che si suppongono date.

Riassunti di Comunicazione fatte al Congresso Internazionale dei Matematici. (Bologna, Settembre 1928).

T. LEVI-CIVITA: *Alcune applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici.* (Sezione III-A).

Il problema dei due corpi, tenendo conto degli integrali conosciuti, si può far dipendere da un sistema canonico

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1}$$

con un solo grado di libertà, a funzione caratteristica H indipendente dal tempo, il quale, possedendo l'integrale

$$H = E \qquad (E \text{ costante}) \tag{2}$$

si integra per quadrature, come è ben noto. Ciò, sia che i due corpi si assimilino, come d'ordinario, a semplici punti materiali, sia anche in una accezione più generale, quando cioè si considerino quali solidi girevoli attorno al rispettivo asse baricentrale, normale al piano dell'orbita.

In entrambi i casi figurano nella H, oltre alle funzioni incognite x, y, taluni parametri costanti a: le masse, e una costante delle aree nel primo caso; nel secondo, anche momenti di inerzia e altre due costanti di integrazione provenienti da coordinate ignorabili.

Se questi parametri a non sono proprio costanti, ma variano (sia pure molto lentamente) col tempo, come accade ad es. per caduta di meteoriti, ovvero per irraggiamento, o ancora per effetto accumulato di influenze dissipative, allora il sistema (1) non si sa più integrare, e divengono difficili anche le indagini qualitative intese a caratterizzare il comportamento asintotico del moto, noto essendo quello dei parametri a.

Tuttavia, se questi parametri a variano abbastanza lentamente e gradualmente [1], si può ricorrere alla teoria degli invarianti adiabatici [2], sorta, come è ben noto, dalla meccanica atomica e dovuta all'illustre fisico olandese EHRENFEST.

I sistemi (1), nell'ipotesi anzidetta, ammettono un tipico invariante adiabatico, cioè una funzione $V(a \mid E)$ dei parametri e dell'argomento E definito dalla (2) (costante nel moto non perturbato), la quale conserva valore costante anche al variare (lento e graduale) dei parametri a. Tale $V(a \mid E)$ non è altro che l'area del piano (x, y) racchiusa da una generica curva (2) (supposto, ben si intende, che, per i valori considerati delle a e della E, la (2) definisca effettivamente una curva chiusa). Si ha dunque, pur variando le a, la

(1) Con ciò si vuol dire in modo preciso che, in ogni porzione Δt dell'intervallo di tempo che occorre considerare, gli incrementi Δa delle a si possono trattare come infinitesimi di fronte a quelli (sincroni) delle x, y, e che inoltre gli incrementi delle $\frac{da}{dt}$ sono a loro volta infinitesimi rispetto alle $\frac{da}{dt}$ stesse.

(2) Cfr. per es. le mie *Drei Vorlesungen über die Theorie der adiabatischen Invarianten.* « Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität ». B. VI, Heft 3/4, 1928, pp. 323-366.

relazione integrale

(3) $$V(a\,|\,E) = \text{cost.},$$

la quale consente deduzioni concrete, ed anche previsioni asintotiche. Vero è che queste non scendono logicamente dalle sole equazioni differenziali (1), ma implicano anche l'ipotesi della adiabaticità, ossia (come si riconosce, illustrandone la portata) un elemento statistico. Ciò nulla meno codeste conclusioni hanno un interesse pratico equivalente alla certezza matematica, come i risultati della teoria cinetica dei gas e di tanti altri capitoli della fisica moderna.

Nel caso di due corpi puntiformi di masse variabili, va ritenuto $E < 0$, e la (3) si riduce alla forma

(4) $$Ma = \text{cost.},$$

dove M rappresenta la somma delle masse e a il semiasse maggiore dell'ellisse osculatrice.

La (4) porge in modo ovvio alcune proposizioni rigorose dell'ARMELLINI, che gli richiesero acuta disamina e impiego di mezzi elevati, e le completa, conferendo loro assai maggiore portata pratica.

L'analogo invariante adiabatico, relativo al caso più generale di corpi rotanti, permette di assegnare con altrettanta semplicità le condizioni di minimo per l'energia E nelle supposte circostanze. A tale minimo tende il sistema per effetto secolare di lenta, ma incessante dissipatività, in particolare di quella che accompagna i fenomeni di marea. L'interpretazione delle condizioni di minimo è quanto mai espressiva: *Le durate di rotazione di ciascuno dei due corpi debbono eguagliare il periodo della loro rivoluzione.*

Ciò costituisce una generalizzazione notevole del celebre risultato concernente il caso di orbite circolari, stabilito per la prima volta da G. DARWIN con diretta e laboriosa calcolazione, come conseguenza delle sue ricerche sulle maree, e da lui stesso ridimostrato poco dopo, per suggerimento di LORD KELVIN, con eleganti considerazioni energetiche.

U. BROGGI: *Su di una classe di sviluppi in serie di polinomi di Hermite.* (Sezione I-D).

Se l'insieme b_r $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ è reale e limitato e $k < \frac{1}{2}$,

$$\Phi(x) = e^{kx^2}\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^2(x^2-1^2)\ldots(x^2-(s-1)^2)}{(2s)!} \overset{2s}{\Delta} b_{-s} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x(x^2-1^2)\ldots(x^2-s^2)}{(2s+1)!} \, \frac{\overset{2s+1}{\Delta} b_{-s} - \overset{2s+1}{\Delta} b_{-s-1}}{2}\right]$$

è una funzione intera, che in $x=r$ assume il valore $e^{kr^2}b_r$ e verso cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

dove

$$H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad c_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)\Phi(x)dx,$$

tende uniformemente in ogni intervallo finito con $\Phi(x)$: si possono formare infinite funzioni intere, uguali a $e^{kr^2}b_r$ se $x=r$, e per le quali sussiste la possibilità dello sviluppo in serie di polinomi $H_n(x)$, nel senso che si indicò.

— — *Su di un problema di perequazione.* (Sezione IV).

Se i valori osservati $p_1, ..., p_n$, ed i valori perequati $y_1, ..., y_n$ sono funzioni di una variabile reale x ed è $p_r=p(x_r)$, $y_r=y(x_r)$

$$\sum_{r=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{y_r-y_{r-1}}{x_r-x_{r-1}}\right)^2+\lambda(y_r-p_r)^2\right\}=\text{Minimo}$$

$(\lambda>0)$, è anche

$$\sum_{r=1}^{n} p_r=\sum_{r=1}^{n} y_r, \qquad \sum_{r=1}^{n} x_r p_r=\sum_{r=1}^{n} x_r y_r+\frac{1}{\lambda}(y_n-y_1)$$

e y_r è la soluzione della equazione alle differenze divise

$$\lambda(y_r-p_r)-\frac{y_{r+1}-y_r}{x_{r+1}-x_r}+\frac{y_r-y_{r-1}}{x_r-x_{r-1}}=0$$

definita dalle condizioni ai limiti $y_0=y_1$, $y_n=y_{n+1}$.

È, se $d_{mn}=x_n-x_m$ e $P_{r,k}$ esprime la somma di tutti i possibili prodotti di k d d'indici compresi fra 1 ed r, i limiti inclusi, e della forma $d_{st}d_{tu}....d_{vw}d_{wr}$, dove $s<t<u<....<v<w<r$, Q_{rk} esprime la somma dei prodotti di ognuno dei sommandi delle P_{rk} per il p_s d'indice uguale all'indice minimo s delle d di ogni sommando

$$y_1=\frac{\sum_{r=1}^{n} p_r+\lambda\sum_{r=1}^{n} Q_{r1}+\lambda^2\sum_{r=2}^{n} Q_{r2}+....+\lambda^{n-1}Q_{n,n-1}}{n+\lambda\sum_{r=1}^{n} P_{r1}+\lambda^2\sum_{r=2}^{n} P_{r2}+....+\lambda^{n-1}P_{n,n-1}}$$

$$y_r=y_1+\lambda[d_{1r}(y_1-p_1)+d_{r2}(y_1-p_2)+....+d_{r-1,r}(y_{r-1}-y_{r-1})].$$

È in particolare, se $x_{r+1} - x_r = 1$, $x_1 = 0$

$$y_r = a_1\varepsilon^r + a_2\varepsilon^{-r} - \lambda\sum_{t=0}^{r}\frac{\begin{vmatrix}\varepsilon^{t+1} & \varepsilon^{-t-1}\\ \varepsilon^r & \varepsilon^{-r}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varepsilon^{t+1} & \varepsilon^{-t-1}\\ \varepsilon^{t+2} & \varepsilon^{-t-2}\end{vmatrix}}$$

dove $\varepsilon > 1$ è radice dell'equazione a radice reciproche e positive

$$u^2 - (2 + \lambda)u + 1 = 0$$

e le costanti a_1, a_2 sono definite dalle condizioni ai limiti, e, se n è grande

$$y_r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}[p_r + \varepsilon^{-1}(p_{r-1} + p_{r+1}) + \varepsilon^{-2}(p_{r-2} + p_{r+2}) + \ldots].$$

FRANCESCO SBRANA: *Considerazioni sul calcolo degli operatori funzionali che si presentano nella Fisica-Matematica* (Sezione III).

In questa Comunicazione viene dimostrato, in primo luogo, che all'identità formale, molto usata nel calcolo degli operatori funzionali,

$$(1) \qquad V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)Fu(t - \tau)d\tau,$$

dove $V(t)$ indica una generica funzione reale della variabile reale t, ed $Fu(t)$ la funzione *impulsiva* unitaria, si può sostituire l'altra

$$(2) \qquad V(t) = \Delta\int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)1(t - \tau)d\tau,$$

con $\Delta = \frac{d}{dt}$, e

$$1(t) = \begin{cases} 0, \text{ per } t < 0, \\ 1, \text{ per } t > 0, \end{cases}$$

che è un'*effettiva* identità, quando $V(t)$ è definita in un determinato intervallo, in esso integrabile, e coincide con la derivata del proprio integrale, per ogni valore di t, compreso in quell'intervallo.

Vengono poi esposte alcune proprietà notevoli della funzione *generatrice*, e della funzione caratteristica di un operatore $f(\Delta)$, lineare e normale. A ciò si perviene, valendosi delle relazioni seguenti, che riteniamo nuove, e suscettibili di numerose applicazioni:

$$
(3) \qquad \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\partial}{\partial\Delta} + t\right) f(\Delta) Fu(t) = 0, \quad (t > 0), \\ \Phi\left(\dfrac{\partial}{\partial\Delta} + t\right) f(\Delta) V(t) = f(\Delta)[\Phi(t) V(t)], \end{cases}
$$

nelle quali $\Phi(\omega)$, (ω essendo variabile complessa), è una funzione definita sull'asse reale, nulla per $\omega = 0$, e olomorfa in un intorno dell'origine, mentre $V(t)$ rappresenta una generica funzione reale, non impulsiva.

Infine, sempre per mezzo delle (3), viene dimostrato che la funzione generatrice, $G(t)$, dell'operatore, usato nell'Elettrodinamica,

$$\varphi(\Delta) = (m_1 + l_1\Delta)^{n_1} \cdot (m_2 + l_2\Delta)^{n_2} \cdot \ldots . (m_s + l_s\Delta)^{n_s},$$

in cui $m_1, m_2, \ldots, m_s, l_1, l_2, \ldots, l_s$, sono costanti rispetto a t, reali o complesse, ed $n_1, n_2, \ldots, n_s$ sono costanti reali, è soluzione dell'equazione di Laplace alle derivate ordinarie

$$\left[tf_1(\Delta) + f_1(\Delta)\frac{d \log \varphi}{d\Delta} + \frac{df_1}{d\Delta}\right] G(t) = 0,$$

dove

$$f_1(\Delta) = (m_1 + l_1\Delta) \cdot (m_2 + l_2\Delta) \ldots . (m_s + l_s\Delta).$$

Ettore Cavalli: *Sull'integrazione delle equazioni differenziali della balistita.* (Sezione I-C).

Accennato brevemente al metodo usato dal Siacci per l'integrazione di quelle equazioni differenziali, e fatto notare quanto sia importante che le formule definitive siano di facile calcolazione ed alla portata di semplici calcolatori, si addita agli analisti il nuovo problema balistico che consiste nell'integrare quelle equazioni tenendo conto che la densità dell'aria varia col variare dell'altitudine.

Allora le equazioni da integrare, e che formano sistema, sono le due seguenti

$$gd(v \cos \theta) = \gamma e^{-\alpha y} vF(v) d\theta, \quad gdy = - v^2 \operatorname{tg} \theta \, d\theta$$

ove g è la gravità, γ ed α sono costanti, v, θ, y sono rispettivamente la velocità, la sua inclinazione sull'orizzonte e l'ordinata (verticale) corrispondente; $F(v)$ è una funzione che rappresenta la resistenza dell'aria sull'unità di massa.

L'integrazione è stata già compiuta per $F(v) = \lambda v$ con λ costante: sarebbe ora desiderabile che venissero determinate altre forme della $F(v)$ che consentano di ridurre il problema alle quadrature; od almeno tentare le forme $F(v) = \lambda v^n$ con λ ed n costanti.

— — *Sui principi fondamentali della teoria degli errori.* (Sez. IV, A).

Si espone il metodo usato nelle scuole d'Artiglieria per presentare la teoria degli errori, il quale riesce più chiaro ed evidente del metodo astratto; si lamenta poi che i cultori del Calcolo delle probabilità ignorino il contributo che i tiri d'artiglieria possono fornire per illustrare i principi di quel calcolo.

ALESSANDRO TERRACINI: *Un nuovo problema di geometria proiettiva differenziale* (Sezione II–B).

Il problema dell'applicabilità proiettiva delle superficie del nostro spazio è un problema molto interessante, ma — a differenza di quanto avviene per l'ordinaria applicabilità metrica — investe solo una classe molto ristretta di superficie, cioè le superficie *R*. Vale perciò la pena di studiare anche una *quasi-applicabilità* proiettiva che imponga alcune, ma non tutte le condizioni della applicabilità, così da potersi realizzare in condizioni più generali. A questo concetto si informano le quasi applicabilità che ho definito nella mia comunicazione, facendo conoscere una prima serie di risultati su di esse.

Secondo la mia definizione due superficie S e S', luoghi rispettivamente dei punti $x = x(u, v)$ e $x' = x'(u, v)$ sono quasi applicabili, se esistono due centri di proiezione $y(u, v)$ e $y'(u, v)$ [1] dai quali le S e S' si proiettino sui piani tangenti in x e x' secondo due sistemi piani omografici negli intorni di secondo ordine, corrispondendosi in tale omografia (dopo avere opportunamente normate le x e le x') non solo i punti x e x'. ma anche $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x'}{\partial u}$; $\frac{\partial x}{\partial v}$ e $\frac{\partial x'}{\partial v}$.

A ciascuna di due superficie quasi applicabili resta così associata una congruenza rettilinea (descritta rispettivamente dalle rette xy, $x'y'$): un primo problema della quasi applicabilità consiste nel prefissare una delle due superficie e la relativa congruenza: la ricerca della seconda dipende da un sistema di sei equazioni alle derivate parziali in sei funzioni incognite di due variabili. Un secondo problema per la quasi applicabilità consiste nel prefissare le due superficie che si vogliono riferire fra loro, e nel

[1] Ognuno dei quali può muoversi sulla retta che lo congiunge al corrispondente punto x oppure x'.

ricercare tutte le possibili quasi applicabilità proiettive che si possono definire tra esse. Le superficie quasi applicabili su un piano sono — all'infuori di una soluzione triviale — solamente le superficie R (che hanno così una parte essenziale anche nella mia teoria della quasi-applicabilità proiettiva); e il modo di realizzare tale quasi applicabilità si riattacca, ponendola in una nuova luce, a una proprietà delle superficie R recentemente scoperta da FUBINI.

Il mio concetto di quasi applicabilità è suscettibile di estensioni.

BENIAMINO SEGRE: *Sui moduli delle curve algebriche.* (Sezione II-A).

In un prossimo lavoro, l'A. esaminerà la possibilità di ottenere modelli proiettivi piani di tutte le curve di dato genere p, da un'equazione in cui entrino razionalmente certi parametri variabili (i moduli), rispondendo affermativamente alla questione per $p < 11$.

Per $p \geq 11$ non è facile di costruire — se pure esiste — un'equazione siffatta, poichè l'A. dimostrerà che se una curva piana algebrica irriducibile, di genere $p \geq 11$, è a moduli generali, il gruppo dei suoi punti multipli occupa nel piano una posizione particolare. Più precisamente, per $p > 36$ una curva di genere p a moduli generali individua un sistema lineare *la cui dimensione effettiva è nulla, e la cui dimensione virtuale risulta inferiore a* — p.

BRUNO FINZI: *Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi.* (Sezione V).

È noto quale importanza ha lo studio delle singolarità nell'analisi moderna: le funzioni analitiche si studiano e si classificano appunto in base alle loro singolarità. Si comprende quindi che ogni qual volta un problema fisico venga schematizzato in un problema matematico, le singolarità analitiche eventualmente presenti caratterizzeranno pure il problema fisico, o almeno quello schema di problema fisico che si è voluto rappresentare matematicamente. In questa Nota ci si occupa, in particolare, dell'influenza delle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi.

La sorgente, il vortice puntiforme, la corrente che investe un solido con punti angolosi sono esempi semplicissimi di problemi fisici comportanti singolarità nella loro rappresentazione matematica.

Si sa quale profonda modificazione subiscano i teoremi analitici in presenza di singolarità: basti citare il teorema fondamentale di CAUCHY. È ben naturale pensare quindi che la presenza di singolarità porti pure profonde modificazioni nei teoremi di meccanica dei fluidi. E così è infatti:

Si consideri un fluido incompressibile moventesi di moto piano. Se si traccia una linea chiusa, limitante una regione di piano ove il moto è privo di singolarità, e si calcola il flusso attraverso a tal linea, si trova manifestamente zero. Non così (in generale) se nella regione di piano considerata vi sono singolarità. Nel caso della sorgente, ad esempio, tale flusso uguaglia la portata della sorgente stessa.

Consideriamo il classico paradosso di d'ALEMBERT: esso sussisterà per un corpo traslante uniformemente in un fluido, allorchè si suppone il moto indotto stazionario e regolare. Non si può però affermare che esso sussista ancora se si toglie l'ipotesi di regolarità: così esso non sussiste nel caso dell'arco di circonferenza (BIKLEY), nè nell'ipotesi di scia di vortici (KARMAN), e neppure nell'ipotesi del PRANDTL, chè le singolarità presenti — fisicamente giustificabilissime — sono appunto atte analiticamente a rimuovere il paradosso.

Si consideri l'ormai classico teorema di KUTTA-JOUKOWSKI: esso non sussiste più, in generale, se il profilo investito dalla corrente traslo-circolatoria presenta delle cuspidi: un notevole esempio di ciò è offerto dal caso della lamina studiato da CISOTTI.

Se il campo di moto si estende indefinitamente, oltre ai punti di singolarità è punto caratteristico del fenomeno in istudio il punto all'infinito, dove, del resto, si ripercuotono le singolarità al finito. Un notevolissimo esempio di ciò è dato dal paradosso di d'ALEMBERT e dalle sue estensioni. L'annullarsi della risultante delle azioni dinamiche che un fluido indefinito esercita su di un solido traslante in seno ad esso, è subordinato infatti ad opportune condizioni all'infinito. Il non verificarsi di queste per una corrente traslo-circolatoria investente un profilo regolare rigido spiega appunto la presenza di una forza sostentatrice, quale è definita dal teorema di KUTTA-JOUKOWSKI. Viceversa, basta supporre che — come per i liquidi perfetti — anche per i liquidi viscosi queste condizioni siano verificate, perchè anche ad essi sia estensibile il paradosso di d'ALEMBERT.

GIACOMO FURLANI: *Nuovi indirizzi nell'insegnamento della matematica in Italia* (Sezione VI).

Lo sviluppo rigoglioso ch'ebbe in Italia nella seconda metà del secolo scorso la critica dei fondamenti della matematica e l'indirizzo purista assunto dagli studi esercitarono influssi profondi e duraturi sull'insegnamento; benefici da prima, in quanto servirono a ristabilire il rigore logico delle trattazioni, furono poi la causa del prevalere di un eccessivo astrattismo, che si manifestò sia nella compilazione dei programmi di studio, nei quali venne spesso a mancare quel primo periodo dell'esperienza e dell'intuizione che deve precedere qualunque astrazione, sia nei metodi d'insegnamento, che alla preoccupazione scientifica sacrificarono le esigenze didattiche

Un più profondo esame delle conclusioni cui giunge la critica dei fondamenti sull'essenza della matematica e lo studio dello sviluppo storico delle sue teorie convinsero della possibilità e della opportunità di conciliare le necessità teoriche con quelle didattiche e rendere l'insegnamento più conforme alle leggi della formazione dello spirito.

La reazione contro quei metodi infecondi, che fra le numerose manifestazioni ebbe, nel IV Congresso internazionale dei matematici, la valida parola di GIOVANNI VAILATI, potè dar luogo ad una pratica realizzazione soltanto nel 1923, con la riforma generale della scuola. Secondo i nuovi programmi, l'aritmetica razionale è esclusa dai ginnasi, l'insegnamento è in generale più pratico e intuitivo nel primo grado, più razionale nel secondo, dove è pure ammodernato, ma sono tuttavia ravvicinati argomenti ch'ebbero storicamente una comune origine; soltanto negli istituti tecnici e magistrali inferiori fa tuttavia difetto un primo insegnamento intuitivo della geometria.

Nei testi di più recente pubblicazione è manifesto l'intendimento di tener conto di quella viva realtà ch'è lo spirito di chi apprende: postulati e idee primitive sono scelti con riguardo alla comune esperienza e chiariti con opportuni riferimenti all'intuizione; osservazioni e applicazioni diverse mettono in rilievo i rapporti fra il concreto e l'astratto contribuendo a suscitare una partecipazione attiva allo studio da parte del discente.

Anche l'abbinamento dalla matematica con la fisica è inteso ad un miglior riguardo all'unità spirituale dell'alunno, che reclama la maggior possibile fusione dei vari insegnamenti. Una minore profondità nella conoscenza delle due discipline da parte dell'insegnante sarà largamente compensata da una visione più larga, più universale, più viva ch'egli saprà dare agli alunni dello studio e da una maggior efficacia del suo insegnamento.