
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO ASCOLI

Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.5, p. 230-237.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_230_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_230_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche.

Nota di GUIDO ASCOLI (a Torino).

Le singolarità isolate delle funzioni armoniche in due o più variabili sono state studiate sin da molti anni or sono da BÔCHER e PICARD; i loro risultati sono stati di recente ritrovati per via più elementare, estesi e completati da BOULIGAND, NOAILLON, LEBESGUE, PICONE, KELLOGG, RAYNOR ⁽¹⁾. Queste ricerche, per la parte che qui interessa, possono riassumersi nei due enunciati:

a) Se O è un punto singolare isolato per la funzione armo-

(1) V. le Note di PICARD, BOULIGAND, NOAILLON, LEBESGUE nei « Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences », 1° sem. 1923; quelle di PICONE nei « Rend. Acc. Lincei », serie 6^a, vol. III (giugno 1926), e vol. IV (luglio 1926); quella di BÔCHER nel « Bull. Ann. Math. Soc. », 1903; quelle di KELLOGG e RAYNOR nello stesso periodico, 1926.

nica $U(P)$ in n variabili, e se nell'intorno di O la $U(P)$ è inferiormente (superiormente) limitata, per $P \rightarrow O$ la $U(P)$ tende a $+\infty$ ($a - \infty$) (PICONE-RAYNOR).

b) Se O è un punto singolare isolato per la funzione armonica $U(P)$ in n variabili, ove essa diviene infinita, nell'intorno di O vale la decomposizione:

$$U(P) = b \cdot (OP)^{2-n} + u(P) \quad \text{per } n > 2$$

$$U(P) = b \log \frac{1}{OP} + u(P) \quad \text{per } n = 2$$

dove b è una costante non nulla e $u(P)$ è regolare anche in O (BÔCHER-PICARD).

Donde facili conclusioni sul possibile comportamento della funzione in vicinanza di una singolarità isolata, e, per $n=2$, sulla natura della singolarità della funzione di variabile complessa $f(z)$ di cui la $U(P)$ è parte reale (si ha evidentemente $f(z) = -b \log z +$ una funzione regolare in O).

Come è stato osservato, la dimostrazione di BÔCHER e PICARD, formalmente semplicissima, non può dirsi rigorosa senza alcuni complementi non molto elementari; onde si giustificano le ricerche posteriori per ottenere dimostrazioni rigorose e ricavate soltanto dai risultati classici della teoria. Su questa via ci sembra notevole il progresso ottenuto da PICONE, le cui deduzioni rimangono tuttavia alquanto artificiose e complesse.

Nella presente Nota, con mezzi analoghi, ma, a mio credere, con un sostanziale guadagno di semplicità, dimostro i teoremi a) e b); dando anzi di b) una dimostrazione che comprende quella di a) ed è quindi una seconda prova di a). Il procedimento trova la sua base in un'osservazione (lemma 1°) che è suscettibile di applicazioni notevoli, come ho dimostrato in una Nota in corso di stampa nei « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei » ⁽¹⁾, e mi sembra, meglio di altri, suscettibile di estensioni.

Queste potranno aversi in due sensi: sia considerando, singolarità non isolate, sia sostituendo all'equazione di LAPLACE le generali equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico del 2° ordine; su quest'ultimo caso esiste già qualche risultato del BÔCHER nel lavoro citato.

LEMMA 1°. — *Se in un insieme aperto A sono definite due funzioni armoniche $U(P)$, $V(P)$, la seconda delle quali ha segno costante, il rapporto $U(P)/V(P)$ non ha in A punti di massimo o di minimo.*

(1) Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet.

Se infatti la $U(P)/V(P)$ avesse un massimo nel punto P_0 di A , in un conveniente intorno di P_0 sarebbe

$$\frac{U(P)}{V(P)} \leq \frac{U(P_0)}{V(P_0)}$$

cioè, essendo $V(P)V(P_0) > 0$,

$$U(P)V(P_0) - V(P)U(P_0) \leq 0.$$

Ora, detto $\Phi(P)$ il primo membro, è $\Phi(P_0) = 0$, sicchè nell'intorno considerato sarebbe

$$\Phi(P) \leq \Phi(P_0)$$

e la $\Phi(P)$ avrebbe in P_0 un punto di massimo. Ma ciò è assurdo, essendo la $\Phi(P)$, evidentemente, funzione armonica in A .

LEMMA 2°. — *Se la funzione armonica $U(P)$ è regolare in un intorno I di un punto O di S_n (eventualmente singolare), la media $\mu(r)$ dei valori assunti da $U(P)$ sulla superficie σ di un'ipersfera $O(r)$ contenuta in I è espressa da*

$$\mu(r) = a + br^{2-n} \quad \text{se } n > 2$$

$$\mu(r) = a + b \log \frac{1}{r} \quad \text{se } n = 2.$$

dove a e b sono costanti per ogni r (PICONE).

Si veda la semplicissima dimostrazione di PICONE (note citate).

Questa formula è del resto una facile trasformazione di una proprietà nota delle funzioni armoniche. Si supponga, per semplicità, $n = 3$. Si sa allora che per due funzioni armoniche $U(P)$, $V(P)$ regolari in un dominio D , anche sul contorno σ , supposto una superficie regolare, si ha

$$\int_{\sigma} \left[U(P) \frac{dV(P)}{dv} - V(P) \frac{dU(P)}{dv} \right] d\sigma = 0$$

dove v è la normale interna. Applicando questa formula alle funzioni $U(P)$, $1/r$, nello stato compreso tra le ipersfere $O(r')$, $O(r'')$ si ottiene subito che può porsi

$$\int_{\sigma} \left[-U(P) \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dU(P)}{dr} \right] d\sigma = 4\pi a$$

(a costante), σ indicando qui una ipersfera generica $O(r)$.

Dividendo per 4π ed eseguendo le operazioni troviamo:

$$\mu(\varrho) + \frac{1}{4\pi\varrho} \int_{\sigma} \frac{dU(P)}{dr} d\sigma = a.$$

Ma anche l'integrale contenuto in questa formula è costante (teorema del flusso); ponendo allora

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{dU(P)}{dr} d\sigma = b$$

risulta immediatamente la tesi. Il procedimento è evidentemente generale.

LEMMA 3°. — *Se la funzione armonica $U(P)$ è regolare nell'ipersfera $O(R)$ di S_n , salvo al più in O , ed è in essa inferiormente limitata, essa non è inferiore alla funzione armonica $V(P)$ regolare in tutta $O(R)$, che assume al contorno i medesimi valori.*

Per fissare le idee, sia anche qui $n=3$, e nella sfera $O(R)$ sia $U(P) > k$. Sulla superficie di $O(R)$ sia M il valore massimo di $U(P)$; sarà nella sfera $V(P) \leq M$. Descritta la sfera $O(\varrho)$ interna alla $O(R)$ si applichi il lemma 1° alle funzioni $U(P) - V(P)$, $1/(OP)$ nell'interno dello strato compreso tra le due sfere; risulterà che la funzione

$$f(P) = (OP) \cdot [U(P) - V(P)]$$

non ha massimi nè minimi nello strato. Onde, aggiunte allo strato le superficie limiti, su una di queste la $f(P)$ prenderà il suo valore minimo. Ma su $O(R)$ è $f(P) = 0$, su $O(\varrho)$ è $f(P) > \varrho(k - M)$, sicchè nello strato $f(P)$ è maggiore del maggiore dei numeri 0 e $\varrho(k - M)$. Si faccia tendere ϱ a zero: risulterà $f(P) \geq 0$, $U(P) \geq V(P)$ in tutta la sfera $O(R)$.

Il procedimento è generale; nel caso $n=2$ dovrà solo avvertirsi che $1/(OP)$ va sostituito con $\log [1(OP)] + c$, dove c sia abbastanza grande perchè la funzione non si annulli nella sfera $O(R)$.

LEMMA 4°. — *Nelle ipotesi del lemma 3°, e con le notazioni del lemma 2°, sarà $b=0$ o $b>0$ secondochè $U(P)$ è regolare o singolare in O .*

Conservando a $V(P)$ il significato precedente, sopra una sfera $O(r)$, con $0 < r < R$, la media dei valori di $V(P)$ non sarà superiore a quella di $U(P)$. Ma la prima vale $V(O)$, cioè $\mu(R)$; si ha dunque

$$\mu(R) \leq \mu(r) \quad \text{cioè} \quad b \geq 0.$$

Varrà l'uguaglianza se su $O(r)$ si ha $U(P) = V(P)$, ossia, r essendo arbitrario, se in tutta $O(R)$ è $U(P) = V(P)$; la $U(P)$ è allora regolare in O . L'inverso è evidente.

Visto il significato di b , questo lemma esprime che se nell'intorno di O la $U(P)$ è regolare e inferiormente limitata, il noto integrale

$$\int_{\sigma} \frac{dU(P)}{dv} d\sigma \quad (\nu \text{ normale interna})$$

esteso ad una superficie qualunque che circondi O , è positivo o nullo secondochè $U(P)$ è singolare o regolare in O . È molto notevole che questo teorema vale anche per singolarità non isolate, purchè l'insieme dei punti singolari appartenga ad un tipo che altrove (loc. cit.) ho indicato col simbolo Z (un insieme Z è in sostanza l'insieme dei punti di infinito di una funzione armonica positiva). La dimostrazione, salvo alcuni complementi, segue la traccia indicata dai lemmi precedenti.

DIM. DEL TEOREMA a). — Si conservino le ipotesi e le notazioni precedenti. Se $b = 0$, la $U(P)$ è regolare in O . Se $b > 0$, $\mu(r)$ tende a $+\infty$ per $r \rightarrow 0$, sicchè, preso λ positivo comunque grande, per ρ abbastanza piccolo sarà $\mu(\rho) > \lambda$. Detta allora $W(P)$ la funzione armonica regolare in $O(\rho)$ che coincide al contorno con $U(P)$ sarà $U(P) > W(P)$ e $W(O) = \mu(\rho) > \lambda$. Esisterà allora un intorno di O in cui sarà ancora $W(P) > \lambda$; in esso, a fortiori, è $U(P) > \lambda$. La $U(P)$ tende dunque a $+\infty$ quando P tende ad O .

Il caso di una $U(P)$ superiormente limitata si riduce al precedente mediante la considerazione della $U_1(P) = -U(P)$.

Non può sperarsi di estendere il teorema a) a singolarità non isolate del tipo Z . Per esempio, il potenziale di linea (precis. di un segmento),

$$U(P) = \int \frac{s ds}{r},$$

che ha fornito a LEBESGUE un caso di impossibilità del problema di DIRICHLET, è sempre positivo, ma non è infinito in tutti i punti del segmento attirante: per $s = 0$ si ha indeterminazione. E il segmento è un insieme Z , perchè una distribuzione uniforme dà potenziale ovunque infinito.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema b), per la quale la distinzione tra il caso $n > 2$ e il caso $n = 2$ si renderà a un certo punto necessaria.

Nell'ipersfera $O(R)$ la $U(P)$ sia inferiormente limitata; detta al solito $V(P)$ la funzione armonica regolare in $O(R)$ che coincide al contorno con la $U(P)$, consideriamo la funzione

$$f(P) = U(P) - V(P)$$

ancora armonica in $O(R)$, salvo al più in O , nulla al contorno, positiva o nulla all'interno.

Sia $n > 2$; essendo $0 < r < R$, costruiamo la funzione $W(P)$ armonica all'esterno dell'ipersfera $O(r)$, nulla all'infinito, che assume al contorno i valori $f(P)$. Nello strato compreso tra le ipersfere $O(r)$ e $O(R)$ la differenza $W(P) - f(P)$ è positiva o nulla, essendo essa nulla su $O(r)$, non negativa su $O(R)$. È dunque nello strato $f(P) \leq W(P)$.

Sostituendo a $W(P)$ la nota espressione esplicita, si ha

$$f(P) \leq \frac{1}{\omega_n r} \int_{\sigma} f(M) \frac{\varrho^2 - r^2}{(MP)^n} d\sigma$$

dove $\varrho = (OP)$, σ è la superficie della ipersfera $O(r)$, ω_n l'area della ipersfera unitaria in S_n . Poichè evidentemente $(MP) \geq \varrho - r$, e $f(M)$ è positiva, segue:

$$f(P) \leq \frac{\varrho + r}{\omega_n r (\varrho - r)^{n-1}} \int_{\sigma} f(M) d\sigma.$$

Ora per il lemma 2°, la media dei valori di $f(M)$ su $O(r)$ ha la forma $a + b/r^{n-2}$, ossia

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\sigma} f(M) d\sigma = a + \frac{b}{r^{n-2}},$$

onde sostituendo

$$f(P) \leq \frac{\varrho + r}{(\varrho - r)^{n-1}} (ar^{n-2} + b).$$

Tenuto fisso P , e quindi ϱ , si faccia tendere r a zero; si avrà in tutto $O(R)$:

$$f(P) \leq \frac{b}{\varrho^{n-2}}.$$

La funzione armonica

$$g(P) = \frac{b}{\varrho^{n-2}} - f(P)$$

è quindi non negativa, cioè inferiormente limitata; il suo valore medio su $O(r)$ è la costante $-a$; quindi essa è regolare anche in O .

E poichè su $O(R)$ ha il valore costante b/R^{n-2} si ha senz'altro

$$g(P) = \frac{b}{R^{n-2}}.$$

Ne segue

$$f(P) = \frac{b}{\rho^{n-2}} - \frac{b}{R^{n-2}}, \quad U(P) = \frac{b}{\rho^{n-2}} + \left(V(P) - \frac{b}{R^{n-2}} \right)$$

ciò che dimostra il teorema.

Sia $n=2$; la funzione $W(P)$ armonica all'esterno di $O(r)$, regolare all'infinito, che assume su $O(r)$ i valori $f(P)$, non è in generale nulla all'infinito, ma vi assume il valore medio dei valori di $f(P)$ su $O(r)$, che è positivo o nullo. Su $O(R)$ la $W(P)$ è quindi non negativa, e si ha, come prima $f(P) \leq W(P)$.

Gli sviluppi precedenti danno allora:

$$f(P) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} \left(a + b \log \frac{1}{r} \right)$$

e il passaggio al limite per $r \rightarrow 0$ non dà più risultati utili.

Ma si ponga, per ogni dato P , $r = \theta\rho$, con $0 < \theta < 1$; si avrà, per ogni ρ :

$$f(P) \leq \frac{1+\theta}{1-\theta} \left(a + b \log \frac{1}{\theta} + b \log \frac{1}{\rho} \right).$$

Ne segue che la funzione armonica

$$\varphi(P) = b \frac{1+\theta}{1-\theta} \log \frac{1}{\rho} - f(P)$$

regolare in $O(R)$, salvo al più in O , è inferiormente limitata: applicandole il lemma 3° risulta la disuguaglianza:

$$b \frac{1+\theta}{1-\theta} \log \frac{1}{\rho} - f(P) \geq b \frac{1+\theta}{1-\theta} \log \frac{1}{R}$$

donde

$$f(P) \leq b \frac{1+\theta}{1-\theta} \log \frac{R}{\rho}$$

e per $\theta \rightarrow 0$

$$f(P) \leq b \log \frac{R}{\rho}.$$

La funzione armonica

$$g(P) = b \log \frac{R}{\rho} - f(P)$$

risulta allora inferiormente limitata in $O(R)$ e di valore medio nullo su ogni cerchio $O(r)$; essa è anzi nulla su $O(R)$. Come nel

primo caso, risulta prima $g(P)$ regolare anche in O , poi identicamente nulla. Si ha così

$$f(P) = b \log \frac{R}{\varphi}, \quad U(P) = b \log \frac{1}{\varphi} + \left[V(P) - b \log \frac{1}{R} \right]$$

e il teorema *b*) risulta dimostrato anche in questo caso.

Come si era annunciato, questa dimostrazione non presuppone il teorema *a*) che anzi vi è contenuto; ambedue però derivano dalle stesse proposizioni preliminari. Sicchè dai quattro lemmi e dalla precedente dimostrazione vengono insieme stabiliti i teoremi *a*) e *b*), con mezzi molto elementari.

Torino, ottobre 1928.