
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTO OCCHIPINTI

Alcune proprietà delle deformate per flessione delle falde dell'evoluta di una superficie W

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.4, p. 191–200.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_191_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_191_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_191_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Alcune proprietà delle deformate per flessione delle falde dell'evoluta di una superficie W .

Nota di ROBERTO OCCHIPINTI (a Palermo).

Nel presente lavoro dimostro alcune proprietà, che credo non note, delle superficie di rotazione applicabili sulle falde dell'evoluta di una superficie di WEINGARTEN, e delle loro deformate.

1. Dalle espressioni degli elementi lineari delle due falde (1):

$$(1) \quad ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int_{r_1=r_2}^{dr_1} r_1 - r_2 du^2},$$

$$(2) \quad ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2\int_{r_2=r_1}^{dr_2} r_2 - r_1 dr^2}$$

ponendo, con WEINGARTEN:

$$r_2 = \eta(z), \quad r_1 = \eta(z) - z\eta'(z),$$

risulta:

$$ds_1^2 = z^2\eta''^2(z)dz^2 + \eta'^2(z)du^2$$

$$ds_2^2 = \eta'^2(z)dz^2 + z^2dr^2.$$

Identificando questi elementi lineari con quello

$$ds^2 = 1 + f'^2(r) dr^2 + r^2 du^2$$

di una superficie di rotazione di cui $z = f(r)$ è il profilo, cambieremo dapprima u e r in ku ed hr (k ed h costanti) e poi porremo semplicemente:

$$r = k\eta(z)$$

$$r = hz$$

$$z^2\eta''^2(z)dz^2 = 1 + f'^2(r) dr^2 \quad \eta'^2(z)dz^2 = 1 + f'^2(r) dr^2.$$

(1) V. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 1° vol., pag. 286, 11ª ediz. (1902), Pisa. Spocri. Qui si mantengono completamente le notazioni del BIANCHI.

Dunque le equazioni parametriche dei profili Γ e Γ_1 delle superficie di rotazione applicabili sulle falde dell'evoluta di una W sono:

$$(3) \quad \begin{cases} r = k\theta'(z) \\ z = \int \sqrt{x^2 - k^2 \theta''(z)} dz \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} r = hz \\ z = \int \sqrt{\theta'^2(z) - h^2} dz. \end{cases}$$

2. Una prima osservazione suggerita da queste formule è la seguente: Mutando z in $\frac{k}{h} \theta'(z)$ le (4) diventano:

$$r = k\theta'(z), \quad z = \int \sqrt{\frac{k^2}{h^2} [\theta'^2(z)] - k^2 \theta''(z)} dz$$

e coincidono con le (3) se la funzione $\theta'(z)$ soddisfa alla condizione:

$$\theta'[\theta'(z)] = \frac{h}{k} z;$$

allora le curve Γ e Γ_1 coincidono.

Supponendo, per semplicità, $h = k = 1$, deve essere:

$$\theta'[\theta'(z)] = z,$$

quindi

$$\theta'(z) = z;$$

oppure

$$\theta'(z) = \frac{c}{z}$$

o finalmente:

$$\theta'(z) = c - z \quad (c \text{ costante}).$$

Nel primo caso i raggi principali dell'evolvente sono

$$r_1 = -\frac{z^2}{2} + c', \quad r_2 = \frac{z^2}{2} + c' \quad (c' \text{ costante})$$

sicchè l'evolvente ha costante la somma dei raggi principali; nel secondo caso abbiamo:

$$r_1 = c \log z + c' - c, \quad r_2 = c \log z + c',$$

e l'evolvente ha costante la differenza dei raggi principali; nel terzo caso porremo, trascurando, per semplicità, la costante d'integrale

grazione, (ciò che equivale a sostituire alla superficie una parallela)

$$\theta(z) = cz - \frac{z^2}{2},$$

quindi

$$r_1 = \frac{z^2}{2}, \quad r_2 = \frac{z(2c - z)}{2}$$

e la relazione tra i raggi principali è la seguente: $(r_1 + r_2)^2 = 2c^2 r_1$. Queste superficie hanno dunque costante il segmento terzo proporzionale fra la distanza del centro C_1 di curvatura in P al simmetrico dell'altro centro rispetto a P , ed il raggio r_1 .

L'elemento lineare sferico è:

$$ds'^2 = \frac{du^2}{z^2} + \frac{dr^2}{\theta'^2(z)} = \frac{du^2}{z^2} + \frac{dr^2}{(c - z)^2}$$

sicchè i coefficienti e, g della terza forma fondamentale verificano la relazione semplicissima:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{\sqrt{g}} = c.$$

Le due falde dell'evoluta sono applicabili sulla superficie di rotazione di profilo:

$$z = \int \sqrt{(c - r)^2 - 1} \, dr$$

cioè la curva integrale dell'iperbole equilatera $z^2 = (c - r)^2 - 1$.

3. Indicando con β e β_1 gli angoli delle tangenti ai profili (3) e (4) in due punti P e P_1 corrispondenti (cioè relativi agli stessi valori di u e v , quindi di z) con l'asse r si ha:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{z^2 - k^2}}{k}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\sqrt{\theta'^2(z) - h^2}}{h}.$$

Segue, come è ben naturale, che:

Il segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l'asse, è uguale, per le due curve, alla distanza dei centri di curvatura dell'evolvente nel corrispondente punto.

Il prodotto dei raggi dei paralleli, essendo $hkz\theta'(z)$, vediamo che, a meno del fattore costante hk , è uguale alla distanza dei centri di curvatura dell'evolvente.

Le proiezioni, sulle tangenti, dei raggi dei paralleli sono:

$$k^2 \frac{\theta'(z)}{z}, \quad h^2 \frac{z}{\theta'(z)},$$

dunque:

È costante il prodotto delle proiezioni, sulle tangenti, dei raggi dei paralleli.

I raggi di curvatura di Γ e Γ_1 in P e in P_1 sono dati, come si calcola facilmente da:

$$(5) \quad R = \frac{z^2 \theta'' \sqrt{z^2 - k^2}}{k},$$

$$(6) \quad R_1 = \frac{\theta'^2 \sqrt{\theta'^2 - h^2}}{h \theta''}$$

mentre per i segmenti di normale R' ed R'_1 compresi fra i punti P e P_1 e l'asse, si ha:

$$(7) \quad R' = \frac{kz\theta'}{\sqrt{z^2 - k^2}},$$

$$(8) \quad R'_1 = \frac{hz\theta'}{\sqrt{\theta'^2 - h^2}}.$$

Eliminando (z) tra (5) e (7), si ha una relazione fra R ed R' e similmente, eliminando z tra (6) ed (8) si ha una relazione tra R_1 ed R'_1 . Dunque:

Le superficie di rotazione cui sono applicabili le falde dell'evolvente di una W , sono pure superficie W .

Deduciamo inoltre, in armonia col teorema di HALPHEN:

$$RR'R_1R'_1 = (r_2 - r_1)^4.$$

Conducendo pei centri di curvatura in P e P_1 le parallele alle tangenti, poi proiettando sulle tangenti i corrispondenti segmenti di ascisse in PE e P_1E_1 , si ha:

$$\overline{PE} \cdot \overline{P_1E_1} = (r_2 - r_1)^2.$$

Cioè:

Il prodotto delle proiezioni, sulle tangenti, dei segmenti delle ascisse compresi nelle striscie determinate dalle tangenti e dalle parallele a queste dai centri di curvatura, è uguale al quadrato della distanza dei centri di curvatura dell'evolvente.

Proiettando sulle tangenti le proiezioni dei segmenti PE e P_1E_1 sui raggi dei paralleli, troviamo che il prodotto di dette proiezioni

è costante ed eguale al prodotto delle proiezioni, sulle tangenti, dei raggi dei paralleli.

4. Dalle espressioni (1) e (2) degli elementi lineari delle falde dell'evoluta di una W deduciamo che le funzioni caratteristiche φ_1 e φ_2 di WEINGARTEN che danno lo strisciamento delle falde in se stesse, sono, in base ad un notissimo teorema ⁽¹⁾, date da:

$$\varphi_1 = \frac{h}{r_1 - r_2} e^{\frac{2}{r_1 - r_2} \int_{r_1}^{r_2} dr_1}, \quad \varphi_2 = \frac{k}{r_1 - r_2} e^{\frac{2}{r_1 - r_2} \int_{r_1}^{r_2} dr_2},$$

essendo h e k costanti. Segue:

$$\log(\varphi_1 \varphi_2) = \log(hk) - 2 \log(r_1 - r_2) + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr_1}{r_1 - r_2} + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr_2}{r_1 - r_2}.$$

Derivando, per es., rispetto ad r_1 risulta:

$$\frac{d \log(\varphi_1 \varphi_2)}{dr_1} = -2 \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{dr_2}{dr_1} + \frac{2}{r_1 - r_2} + 2 \frac{dr_2}{dr_1} \frac{dr_1}{r_1 - r_2}$$

cioè:

$$\frac{d \log(\varphi_1 \varphi_2)}{dr_1} = 0, \quad \text{quindi} \quad \varphi_1 \varphi_2 = \text{costante}.$$

Pertanto: *È costante il prodotto delle funzioni di Weingarten degli strisciamenti delle falde dell'evoluta di una W in se.* Allora, se θ_1 e θ_2 sono le corrispondenti soluzioni delle equazioni di LAPLACE associate alle assintotiche per la 1^a e 2^a falda dell'evoluta, si hanno, come è noto, le relazioni:

$$\varphi_1 = \theta_1 \sqrt[4]{K_1}, \quad \varphi_2 = \theta_2 \sqrt[4]{K_2}$$

essendo K_1 e K_2 le curvatures delle due falde dell'evoluta della W . Moltiplicando risulta:

$$\varphi_1 \varphi_2 = \theta_1 \theta_2 \sqrt[4]{K_1 K_2};$$

ma, pel teorema di HALPHEN, $K_1 K_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}$, dunque:

$$\theta_1 \theta_2 = a(r_1 - r_2), \quad (a \text{ costante}).$$

(1) V. BIANCHI, loc. cit., 2^o vol., pag. 60.

Pertanto: Se ϑ_1 è la soluzione particolare dell'equazione di Laplace, che dà lo strisciamento della prima falda dell'evoluta in sé, quella corrispondente per l'altra falda è proporzionale ad $\frac{r_1 - r_2}{\vartheta_1}$.

5. Supponiamo che una falda dell'evoluta sia applicabile sulla superficie rotonda che ha per meridiano la curva integrale dell'ellisse

$$z = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$$

di cui l'asse di rotazione (asse z) sia un asse di simmetria; allora le (4) danno: $r = hz$,

$$\frac{bh}{a} \int \sqrt{a^2 - h^2 x^2} \cdot dx = \int \sqrt{\vartheta'(x) - h^2} dz$$

da cui:

$$\vartheta'(x) = \frac{h}{a} \sqrt{(1 + b^2)a^2 - b^2 h^2 x^2}$$

e le (3) ci danno, per la curva meridiana dell'altra falda:

$$r = \frac{kh}{a} \sqrt{(1 + b^2)a^2 - b^2 h^2 x^2},$$

$$z = \frac{h}{a} \int \sqrt{x^2 - k^2} \frac{d}{dx} \sqrt{(1 + b^2)a^2 - b^2 h^2 x^2} \cdot dz$$

dalle quali segue:

$$z = \frac{1}{k} \int \sqrt{x^2 - k^2} \cdot dr,$$

cioè:

$$z = \int \sqrt{\frac{a^2(1 + b^2) - k^2 h^2 b^2}{h^2 k^2 b^2} - \frac{a^2}{h^4 k^4 b^2} r^2} dr.$$

E, se è possibile determinare h e k , che sono arbitrarie, in modo che risulti:

$$(5) \quad \frac{a^2(1 + b^2) - k^2 h^2 b^2}{h^2 k^2 b^2} = b^2,$$

$$(6) \quad \frac{a^2}{h^4 k^4 b^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

quest'ultima si riduce a

$$z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - r^2} dr$$

e coincide col meridiano della superficie di rotazione cui è applicabile la prima falda.

Ora si vede subito che è possibile soddisfare alle (5) e (6) vincolando le costanti h e k alla sola condizione

$$(7) \quad hk = \frac{a}{b}.$$

Dunque: *Se una falda dell'evoluta di una W è applicabile sulla superficie di rotazione che ha per meridiano la curva integrale di un'ellisse di cui l'asse di rotazione sia un asse di simmetria, l'altra falda sarà applicabile sulla stessa superficie rotonda.*

La relazione tra i raggi principali dell'evolvente si trova osservando che

$$r_z = \theta(z) = \frac{h}{a} \int \sqrt{(1+b^2)a^2 - b^2 h^2 z^2} dz = \frac{a}{bh^2} \int \sqrt{k^2(1+b^2) - z^2} dz.$$

Possiamo disporre della costante k in modo che risulti, per semplicità, $k^2(1+b^2)=1$, allora sarà, per la (7):

$$h = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b},$$

quindi

$$r_z = \frac{a(1+b^2)}{b} \int \sqrt{1-z^2} dz,$$

sicchè, ponendo

$$z = \sin t, \quad \frac{a(1+b^2)}{2b} = \frac{1}{c},$$

risulta:

$$r_z = \frac{t + \sin t \cos t}{c}$$

poi

$$r_1 = \theta(z) - z\theta'(z),$$

cioè:

$$r_1 = \frac{t - \sin t \cos t}{c}.$$

Ne segue la relazione cercata:

$$(8) \quad c(r_z - r_1) = \sin c(r_z + r_1).$$

L'evolvente appartiene dunque alla classe di superficie W determinata dal WEINGARTEN con la sua nuova equazione di applicabilità, e della quale DARBOUX ha dato l'elegantissima costruzione geometrica.

Possiamo dire così: *Le deformate per flessione delle superficie rotonde, che hanno per meridiani le curve integrali dell'ellisse di*

cui l'asse di rotazione è un asse di simmetria, sono falde di evolvente delle W tra i cui raggi intercede la (8). Esse sono anche deformate del paraboloide rotondo di profilo $r^2 = 2zi$.

Quest'ultima conclusione risulta subito supponendo che l'ellisse si riduca al cerchio nullo $z^2 + r^2 = 0$.

L'elemento lineare sferico delle superficie (8) è:

$$ds^2 = \frac{du^2}{z^2} + \frac{dv^2}{v^2(z)} = \frac{du^2}{\sin^2 t} + \frac{dv^2}{c^2 \cos^2 t};$$

è perciò della forma:

$$\frac{du^2}{\sin^2 t} + \frac{dv^2}{\cos^2 t};$$

le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, hanno cioè costante la somma e la differenza delle distanze geodetiche a due curve fisse non geodeticamente parallele, e t è l'angolo di queste curve (ellissi ed iperboli geodetiche).

Ma t ha un altro significato geometrico, che andremo a mostrare calcolando, con le formule generali, i coefficienti D_1 , D_1'' della seconda forma fondamentale della falda S_1 di evolvente.

Si ha allora:

$$D_1 = \frac{4 \cos^2 t \, ct}{c^2 \sin^2 t \, cv}, \quad D_1'' = -\frac{\sin^2 t \, ct}{\cos t \, cv},$$

sicchè l'equazione delle assintotiche di S_1 è:

$$\frac{4}{c^2} \cos^4 t \, du^2 - \sin^4 t \, dv^2 = 0,$$

cioè:

$$(9) \quad \frac{c^2}{4} du^2 - g^2 dv^2 = 0;$$

questa è, sulla sfera di GAUSS, l'equazione delle immagini sferiche delle linee dell'evolvente, che corrispondono alle assintotiche dell'evoluta, e la tangente dell'angolo con le linee v è data da:

$$\left| \frac{\sqrt{g} \, dv}{c \, du} = \frac{c}{2} \right|, \frac{e}{g} = \cotg t,$$

sicchè t è l'angolo delle immagini sferiche delle linee che sull'evolvente, corrispondono alle assintotiche dell'evoluta, con le linee di curvatura di un sistema. La (9) mostra subito poi che le assintotiche delle due falde dell'evoluta corrispondono (DARBOUX) a quelle

linee dell'evolvente le cui immagini sferiche sono le traiettorie ortogonali delle geodetiche che corrispondono alle rette

$$v + \frac{2}{c} u = \text{costante}, \quad v - \frac{2}{c} u = \text{costante}$$

del piano rappresentativo.

6. Cambiando nelle formule del numero precedente la costante a in ia , vediamo che se una falda dell'evoluta di una W è applicabile sulla superficie rotonda di meridiano

$$z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 + r^2} dr$$

integrale di un'iperbole, l'altra falda sarà applicabile sulla stessa superficie.

Allora nella relazione (8) tra i raggi principali dell'evolvente, la costante

$$c = \frac{2b}{a(1 + b^2)}$$

è un immaginario puro, sicchè la relazione, liberata dall'immaginario, si scrive così:

$$(10) \quad c_1(r_2 - r_1) = sh c_1(r_2 + r_1)$$

essendo ora c_1 una costante reale.

Dunque: *Le deformate per flessione delle superficie rotonde che hanno per profili le curve integrali dell'iperbole, sono falde di evolute delle superficie W tra i cui raggi principali intercede la (10).*

In particolare, supponendo che l'iperbole si riduca alla coppia di rette $z^2 - r^2 = 0$, vediamo che le superficie in discorso sono pure le evolventi delle deformate del paraboloide rotondo di profilo $r^2 = 2z$.

Possiamo dunque dire così: *Le deformate per flessione del paraboloide rotondo di profilo $r^2 = 2z$, sono falde di evolute delle superficie W tra i cui raggi principali intercede la (10).*

L'elemento lineare sferico delle superficie di questa classe è dato da

$$ds'^2 = \frac{du^2}{z^2} + \frac{dv^2}{g'^2(z)}$$

essendo

$$g'(z) = \frac{2}{c} \sqrt{1 - z^2} = \frac{2i}{c} \sqrt{z^2 - 1}.$$

sicchè, ponendo $z = cht$, sarà: $\theta'(z) = \frac{2i}{c} sht$ e si noti che $\frac{2i}{c}$ è reale essendo c un immaginario puro. Dunque l'elemento sferico è della forma:

$$(11) \quad ds^2 = \frac{du^2}{ch^2 t} + \frac{dv^2}{sh^2 t}.$$

Le linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ hanno ora costante la somma e la differenza delle distanze geodetiche a due curve immaginarie fisse. Calcolando i coefficienti D_1 , D_1'' della seconda forma fondamentale della falda S_1 di evoluta, si trova:

$$D_1 = \frac{-c}{\sqrt{g}} \cdot \frac{2}{c} sh^2 t \frac{\partial t}{\partial v}, \quad D_1'' = -\sqrt{g} \frac{2}{c} ch^2 t \frac{\partial t}{\partial v}$$

sicchè l'equazione delle assintotiche di S_1 è

$$cdv^2 + \frac{4}{c^2} g^2 dv^2 = 0.$$

Sulla sfera di GAUSS, questa rappresenta le immagini sferiche delle linee dell'evolvente che corrispondono alle assintotiche dell'evoluta. Le traiettorie ortogonali sono le linee di equazione

$$\frac{4}{c^2} du^2 + dv^2 = 0,$$

cioè le rette

$$v + \frac{2i}{c} u = \text{costante}, \quad v - \frac{2i}{c} u = \text{costante}$$

del piano rappresentativo.

Per costruire tutte le superficie della classe (10) basta, secondo DARBOUX, pigliare i punti di mezzo dei segmenti, che uniscono un punto di una curva Γ immaginaria a torsione immaginaria pura costante con un punto della curva Γ_1 immaginaria coniugata di Γ . S'intende che per avere punti reali della superficie, bisogna accoppiare punti delle due curve, corrispondenti a valori immaginari coniugati dei rispettivi parametri.

Palermo, ottobre 1928.