
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RENATO CACCIOPPOLI

Applicazione di un teorema generale sul prolungamento dei funzionali allo studio delle equazioni differenziali lineari a coefficienti discontinui

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **7** (1928), n.4, p. 188–191.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_188_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_188_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Applicazione di un teorema generale sul prolungamento dei funzionali allo studio delle equazioni differenziali lineari a coefficienti discontinui.

Nota di RENATO CACCIOPPOLI (a Napoli).

Ho mostrato in una Nota dei « Comptes Rendus » ⁽¹⁾ come la definizione dell'integrale di LEBESGUE (più generalmente di un qualunque integrale di LEBESGUE-STIELTJES) nel campo delle funzioni di BAIRE, che sono poi tutte quelle che possono *effettivamente* occorrere in Analisi, si possa far dipendere assai semplicemente dal *prolungamento* dell'integrale di CAUCHY (più generalmente dell'integrale di STIELTJES), definito per le funzioni continue, mercè l'uso di un minimo di nozioni fondamentali della teoria formale delle funzioni additive di insieme e quello, ormai classico, del lemma di ARZELÀ. Mi sono trovato così a formulare implicitamente un teorema generale sul prolungamento dei funzionali continui nel campo delle funzioni di BAIRE; questo teorema, opportunamente completato, enuncio qui dapprima, e mi soffermo poi, fra le numerose applicazioni di cui esso è suscettibile, su una notevole definizione *costruttiva* degli integrali di una equazione differenziale lineare avente per coefficienti funzioni di BAIRE ⁽²⁾, e sull'estensione a questi integrali del teorema sull'integrazione per serie di VITALI.

1. TEOREMA. Sia C un campo aperto dello spazio delle funzioni continue definite in un dominio D , e indichiamo con $\Phi[f_1, \dots, f_n]$ un funzionale uniformemente continuo dipendente da n funzioni di C , ed avente la proprietà che la variazione da esso subita, quando una qualunque delle funzioni f varia nei punti di un insieme I contenuto in D , tende a zero in pari tempo di una funzione additiva di I (in particolare è maggiorata in valore assoluto da una simile funzione): questo funzionale può estendersi, mediante successivi passaggi al limite, a tutte le funzioni di Baire generate a partire da funzioni di C , e si ha in tutto il campo ampliato

$$\lim \Phi[f_1, \dots, f_n] = \Phi[\lim f_1, \dots, \lim f_n],$$

⁽¹⁾ Sur les fonctionnelles linéaires, 21 juin 1926.

⁽²⁾ Per le equazioni differenziali *discontinue*, v. la trattazione generalissima di CARATHÉODORY (in « Vorlesungen über reelle Funktionen »).

comunque le funzioni f tendano ai loro limiti, cioè il funzionale Φ è continuo nel senso più generale (come gli integrali definiti).

Si riconosce infatti agevolmente che le ipotesi su Φ portano come conseguenza che la variazione $\Delta\Phi$ generata dalle variazioni $\Delta f_1, \dots, \Delta f_n$, tende a zero comunque $\Delta f_1, \dots, \Delta f_n$ tendano a zero.

Questo teorema si applica, oltre che al prolungamento dei funzionali lineari, anche a quello dei funzionali multilineari e di grado superiore ⁽¹⁾ nel campo delle funzioni di BAIRE; se ne deduce anche immediatamente il teorema di VITALI sull'integrazione per serie.

2. Consideriamo un'equazione differenziale, lineare e di tipo normale, nell'intervallo (a, b) :

$$(1) \quad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = p(x).$$

Supponiamo dapprima i coefficienti $p_1, \dots, p_n$ continui, e diciamo M un numero che ne limiti superiormente i valori assoluti.

Sia $\eta(x)$ un integrale particolare della (1), α un numero maggiore le quantità $|\eta(a)|, |\eta'(a)|, \dots, |\eta^{(n-1)}(a)|$. Se $p(x)$ (supposto per ora anch'esso continuo) è nullo all'infuori di un intervallo parziale (α, β) di (a, b) sussiste la seguente formola di maggiorazione per $\eta(x)$ e per le sue prime $n-1$ derivate

$$(2) \quad |\eta^{(m)}(x)| < H\alpha + K(\beta - \alpha) \max |p(x)|, \quad (m=0, 1, \dots, n-1)$$

dove H e K non dipendono che da M .

Si deduce agevolmente da questa formola che l'integrale particolare $\eta(x)$, individuato dai valori iniziali fissi $\eta(a), \eta'(a), \dots, \eta^{(n-1)}(a)$, costituisce un funzionale delle $n+1$ funzioni continue $p_1, \dots, p_n, p$ che soddisfa in ogni campo limitato le condizioni del teorema precedente.

Difatti, in un campo di funzioni non superanti M in valore assoluto, una variazione Δp_i di p_i genera una variazione $\Delta \eta$ di η che verifica l'equazione

$$\Delta \eta^{(n)} + p_1 \Delta \eta^{(n-1)} + \dots + (p_i + \Delta p_i) \Delta \eta^{(n-1)} + \dots + p_n \Delta \eta = -\Delta p_i \eta,$$

nonchè le condizioni iniziali $\Delta \eta(a) = \dots = \Delta \eta^{(n-1)}(a) = 0$. Di questa equazione, i primi n coefficienti non superano M in valore assoluto, l' $(n+1)^{mo}$ non supera $2M[H\alpha + KM(b-a)]$. Facendo invece variare p si troverebbe

$$\Delta \eta^{(n)} + p_1 \Delta \eta^{(n-1)} + \dots + p_n \Delta \eta = \Delta p,$$

⁽¹⁾ V. la mia Nota *Sui funzionali multilineari e di grado superiore*. (« Rend. Acc. Lincei », 23 giugno 1927).

e qui il termine noto non supera $2M$. Sicchè la (2) assicura che la variazione di $\eta(x)$ non solo, ma anche di una qualunque delle $n - 1$ prime derivate di $\eta(x)$, corrispondente alla variazione di un coefficiente sull'intervallo (z, ξ) , è maggiorata dal prodotto di $\xi - z$ per un fattore L che dipende da M soltanto, e che in generale quella corrispondente ad una variazione sull'insieme I è maggiore da L mis I ⁽¹⁾.

Il teorema generale fornisce così la definizione per *prolungamento* degli integrali di ogni equazione (1) i cui coefficienti siano funzioni limitate di BAIRE: si ottiene anche un primo teorema per il passaggio al limite.

3. Per ottenere allo stesso modo la definizione degli integrali della (1) nel caso di coefficienti non limitati, ma soltanto sommabili, basterà sgrossare la disuguaglianza (2), osservando che H e K non dipendono da M che a traverso il massimo degli integrali

$$\int_a^b p_1 dx, \dots, \int_a^b p_n dx, \text{ e che al prodotto } (\xi - z) \max |p| \text{ si può sostit-$$

uire l'integrale $\int_z^\xi |p| dx$.

Se allora i coefficienti della (1) non abbandonano un campo di *uniforme sommabilità*, un campo cioè di funzioni aventi integrali equi-assolutamente continui, la variazione di un integrale particolare generata dalla variazione di un coefficiente sull'insieme I non sarà più, in generale, maggiorata da un multiplo fisso di mis I , ma tenderà sempre a zero per mis $I \rightarrow 0$: ed il teorema fondamentale sarà sempre applicabile.

La definizione dell'integrale generale viene così estesa ad ogni equazione (1) i cui coefficienti siano funzioni sommabili di BAIRE: e di più resta dimostrato il teorema:

Se i coefficienti dell'equazione (1) tendono, conservandosi i loro integrali equi-assolutamente continui, ai limiti $P_1(x), \dots, P_n(x), P(x)$, un integrale particolare qualunque $\eta(x)$, definito da un sistema fisso di condizioni iniziali, tende uniformemente all'integrale particolare $\Pi(x)$, definito dalle medesime condizioni, dell'equazione limite

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + P_n(x)y(x) = P(x):$$

(1) L'uniformità della continuità di η rispetto a $p_1, \dots, p_n, p$ risulta anche immediatamente.

dippiù le prime $n - 1$ derivate di $z(x)$ tendono uniformemente a quelle di $u(x)$.

E si può inoltre affermare che la convergenza è uniforme in ogni insieme limitato dello spazio dei sistemi di valori iniziali: ed in questo senso dire che l'integrale generale dell'equazione variabile tende uniformemente a quello dell'equazione limite.

Napoli, 21 settembre 1928.