
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENEA BORTOLOTTI

Alcuni risultati di Geometria proiettivo-differenziale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **7** (1928), n.4, p. 178–184.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_178_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alecuni risultati di Geometria proiettivo-differenziale.

Nota di ENEA BORTOLOTTI (a Bologna).

1. I risultati che esporrò in questa Nota si riferiscono allo studio delle equazioni fondamentali per una ipersuperficie in S_{n+1} proiettivo ⁽¹⁾

$$(1) \quad \nabla_{\mu} x_{\lambda} = a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} x_{\nu} + a_{\lambda\mu} X + p_{\lambda\mu} x, \quad \nabla_{\lambda} X = l_{\lambda} x + m_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} x_{\nu} \quad (2)$$

$$\left(x_{\lambda} = \frac{\partial x}{\partial u_{\lambda}}; \lambda, \mu, \nu, \tau, \omega, \alpha = 1, 2, \dots, n \right)$$

e delle relative condizioni d'integrabilità. Precisamente, io qui conduco lo studio di tali condizioni (studio che svilupperò in modo più completo in un prossimo lavoro) pel caso $n > 2$ fino alla determinazione (n.° 2, 3) di espressioni abbastanza semplici dei coefficienti l_{λ} , $p_{\lambda\mu}$, $m_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $a_{\lambda\mu}$ ed $a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ (che finora mancavano); pel caso $n = 2$, fino a stabilire (n.° 4) una relazione, assai semplice e (a mio parere) notevole, tra gli invarianti di 1°, 2°, 3° e 4° ordine dell'elemento lineare proiettivo $\frac{F_3}{F_2}$ ($F_3 = a_{\lambda\mu\nu} du^{\lambda} du^{\mu} du^{\nu}$, $F_2 = a_{\lambda\mu} du^{\lambda} du^{\mu}$). Tale relazione, che finora non era stata osservata, è condizione necessaria per l'effettiva esistenza di una superficie di elemento lineare proiettivo assegnato. È interessante la relazione in cui questa condizione [(18) del n.° 4] sta con quella [(21) del n.° 5] che RADON ha indicato come condizione necessaria e sufficiente perchè esista una superficie, per la quale due date forme (apolari) F_2 , F_3 siano le forme fondamentali di una geometria affine.

⁽¹⁾ Ved. FUBINI e CECI, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Zanichelli, (1926-27), pp. 79, 81, 335. (Citerò d'ora innanzi quest'opera con le iniziali G. P. D.). Le notazioni qui usate sono quelle di FUBINI e CECI, fatta eccezione per alcune che sono esplicitamente indicate, e inoltre pel simbolo della derivazione covariante a $F_2 = a_{\lambda\mu} du^{\lambda} du^{\mu}$ (∇_{λ} secondo SCHOOTEN) e pel modo d'indicare le componenti dei tensori misti (ad es. $a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $m_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, ecc.).

⁽²⁾ Cfr. CECI, *Courbes tracées sur une surface dans l'espace projectif*, I. (« Publications de la Fac. des Sciences de l'Univ. Masaryk », Brno, (1924), n.° 46). A pag. 14 di questa Memoria il CECI dà le equazioni fondamentali sotto un'altra forma, facendovi figurare il punto $y = X + \frac{1}{2}(J + K)x$ (della quadrica di LIE) al luogo di X : ciò è vantaggioso specialmente se le x sono coordinate normali di FUBINI. Ma è forse preferibile la (1) per lo studio delle condizioni di integrabilità.

Della condizione sopra accennata d'ò svariate forme: segnalo particolarmente l'estrema semplicità della (30).

2. Le condizioni d'integrabilità delle (1) si otterranno eliminando mediante le (1) stesse le derivate $\nabla_\mu x_\lambda$, $\nabla_\lambda X$ da:

$$(2) \quad \nabla_\omega(a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}x^\gamma + a_{\lambda\mu}X + p_{\lambda\mu}x) - \nabla_\mu(a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}x_\gamma + a_{\lambda\omega}X + p_{\lambda\omega}x) = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}x_\gamma, \\ \nabla_\mu(l_\lambda x + m_\lambda^\gamma x_\gamma) - \nabla_\lambda(l_\mu x + m_\mu^\gamma x_\gamma) = 0,$$

ove $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}$ è il tensore di RIEMANN-CHRISTOFFEL per F_2 .

Fatte le eliminazioni ora dette, eguagliando poi i coefficienti di x_γ , X , x nei due membri di ciascuna delle equazioni che così si ottengono, si ha, posto

$$(3) \quad A_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = \nabla_\mu a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} - \nabla_\omega a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} + a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} a_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} - a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} a_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}; \\ (4) \quad a_{\lambda\mu} m_{\omega\gamma} - a_{\lambda\omega} m_{\mu\gamma} + a_{\omega\gamma} p_{\lambda\mu} - a_{\mu\gamma} p_{\lambda\omega} = A_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} + R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}; \\ (5) \quad \nabla_\omega p_{\lambda\mu} - \nabla_\mu p_{\lambda\omega} = a_{\lambda\omega} l_\mu - a_{\lambda\mu} l_\omega + a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} p_{\mu\gamma} - a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} p_{\omega\gamma}; \\ (6) \quad \nabla_\omega m_{\lambda\mu} - \nabla_\mu m_{\lambda\omega} = a_{\lambda\mu} l_\omega - a_{\lambda\omega} l_\mu + a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} m_{\omega\gamma} - a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} m_{\mu\gamma}; \\ (7) \quad \nabla_\omega l_\lambda - \nabla_\lambda l_\omega = a^{\omega\mu}(m_{\omega\mu} p_{\lambda\lambda} - m_{\lambda\mu} p_{\omega\omega}).$$

Le (4) sono $\frac{n(2n^3 - 5n + 3)}{6}$ relazioni indipendenti: le (5) e così le (6) sono in numero di $\frac{n^2(n-1)}{2}$, le (7) sono $\binom{n}{2}$: per $n=2$ si hanno così, in tutto, 8 condizioni alle quali i coefficienti delle (1) debbono soddisfare ⁽³⁾.

Per $n > 2$, le (6) si possono ottenere come conseguenze delle (5) e delle identità di BIANCHI per la derivazione covariante ∇_λ ⁽⁴⁾.

Dalle (5) ricaviamo, anzitutto, le espressioni delle l_α per le $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}$, $p_{\lambda\mu}$. Basta moltiplicare per $a^{\lambda\mu}$ e sommare: si ha subito

$$(n-1)l_\omega = a_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu\nu} p_{\mu\nu} + a^{\mu\nu} \nabla_\mu p_{\nu\omega}.$$

Questa formula se $n=2$ equivale alla (7) pag. 338 di CECIL (G. P. D.), che però ha forma meno semplice.

(3) s'intende: oltre alle condizioni di *simmetria* per i tensori $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}$, $p_{\lambda\mu}$, $m_{\lambda\mu}$ e di *apolarità* di $a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}$ e di $p_{\lambda\mu}$ ad $a_{\lambda\mu}$.

(4) Cfr. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, Springer, 1924), p. 140 e BERWALD, nelle *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II, *Affine Differentialgeometrie* di BLASCHKE, (Berlin, Springer, 1923), p. 172. Citerò d'ora in poi con A. D. quest'ultima opera.

Sia ora K la curvatura riemanniana media di F_2 , onde

$$(9) \quad -n(n-1)K = R = a^{\omega\tau} R_{\omega\tau} = a^{\omega\tau} a^{\lambda\mu} R_{\omega\mu\lambda\tau};$$

posto

$$(10) \quad M = a^{\omega\tau} m_{\omega\tau}, \quad -n(n-1)J = a^{\mu\tau\nu} a_{\mu\tau\nu} = a^{\omega\tau} a^{\lambda\mu} A_{\omega\mu\lambda\tau}.$$

si ha dalle (4):

$$(11) \quad M = -n(J + K).$$

Ciò premesso, dalle (4) stesse ricaviamo

$$(12) \quad \begin{cases} n(m_{\lambda\mu} - p_{\lambda\mu}) = 2\nabla_{\omega} a_{\lambda\mu}^{\omega} - n a_{\lambda\mu}(J + K), \\ (n-2)(m_{\lambda\mu} + p_{\lambda\mu}) = 2(R_{\lambda\mu} + a_{\lambda}^{\omega\nu} a_{\omega\nu\mu}) + n a_{\lambda\mu}^{\circ}(J + K). \end{cases}$$

3. Occorre qui, manifestamente, distinguere i casi in cui è $n > 2$, oppure $n = 2$.

Se $n > 2$, dalle (12) possiamo ricavare le espressioni sia delle $p_{\lambda\mu}$ che delle $m_{\lambda\mu}$:

$$(13) \quad \begin{cases} p_{\lambda\mu} = -\frac{1}{n} \nabla_{\omega} a_{\lambda\mu}^{\omega} + \frac{1}{n-2} (R_{\lambda\mu} + a_{\lambda}^{\omega\nu} a_{\omega\nu\mu}) + \frac{n-1}{n-2} a_{\lambda\mu}(J + K), \\ m_{\lambda\mu} = \frac{1}{n} \nabla_{\omega} a_{\lambda\mu}^{\omega} + \frac{1}{n-2} (R_{\lambda\mu} + a_{\lambda}^{\omega\nu} a_{\omega\nu\mu}) + \frac{1}{n-2} a_{\lambda\mu}(J + K). \end{cases}$$

Sostituendo nelle (8), si avranno anche le l_{ω} espresse per le $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu\nu}$.

Ecco dunque stabilite, pel caso $n > 2$, le effettive espressioni di tutti i coefficienti delle equazioni fondamentali (1) per quelli delle due forme F_2 , F_3 ; quanto abbiamo esposto finora ci dà anche, espressa in una forma più esplicita di quella usuale, la dimostrazione della indeformabilità proiettiva delle ipersuperficie non sviluppabili di S_m ($m > 3$).

4. Sia invece $n = 2$: al quale caso ci limiteremo d'ora in poi. Allora le (12) si riducono a:

$$(14) \quad m_{\lambda\mu} - p_{\lambda\mu} = \nabla_{\omega} a_{\lambda\mu}^{\omega} - a_{\lambda\mu}(J + K).$$

D'altra parte le (5), (6) danno

$$(15) \quad a^{\lambda\mu} \nabla_{\mu} (p_{\lambda\omega} + m_{\lambda\omega}) = -2\nabla_{\omega}(J + K) + a_{\omega}^{\mu\nu} (m_{\mu\nu} - p_{\mu\nu}).$$

Se poniamo

$$(16) \quad 2T_{\omega} = a_{\omega}^{\mu\nu} \nabla_{\tau} a_{\mu\nu}^{\tau} - \nabla_{\omega}(J + K) - \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} a_{\omega}^{\tau\mu}$$

le (15), in forza delle (14), assumeranno la forma seguente:

$$(17) \quad a^{\lambda\mu} \nabla_{\mu} p_{\lambda\omega} = T_{\omega}.$$

Il tensore T_{ω} dei secondi membri, dato dalle (16), dipende soltanto dai coefficienti dell'elemento lineare proiettivo. Orbene: le condizioni di integrabilità delle (17), cioè delle equivalenti

$$(17^*) \quad \nabla_{\mu} p_{\lambda\omega} - \nabla_{\omega} p_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu} T_{\omega} - a_{\lambda\omega} T_{\mu}$$

si riducono a una sola:

$$(18) \quad a^{\omega\tau} \nabla_{\omega} T_{\tau} = 0.$$

Cioè, se indichiamo con T il vettore della metrica asintotica che ha le T_{ω} come componenti covarianti, e con div l'operatore di divergenza in tale metrica,

$$(18^*) \quad \text{div } T = 0.$$

La (18), o (18*), è condizione necessaria perchè esista una superficie di S_2 proiettivo di cui $F_2 = a_{\lambda\mu} du^{\lambda} du^{\mu}$, $F_3 = a_{\lambda\mu\nu} du^{\lambda} du^{\mu} du^{\nu}$ siano le due forme fondamentali (di FUBINI).

Geometricamente, la (18) esprime che la congruenza formata dalle rette che dai punti x della superficie proiettano i punti

$$X + k a^{\lambda\mu} T_{\mu} x_{\lambda} \quad (k = \text{cost.})$$

è coniugata alla superficie.

5. Tra breve indicheremo altre forme sotto cui può essere posta la relazione (18). Ma premettiamo alcune osservazioni. Anzitutto: tenendo presenti le (17), possiamo porre, nel caso $n=2$, le (8) sotto la forma

$$(19) \quad l_{\omega} = a_{\omega}^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + T_{\omega}.$$

Non ci siamo ancora valse delle (7): introducendo in queste le espressioni (19), e tenendo presenti le (14), abbiamo agevolmente

$$(20) \quad \begin{aligned} & a_{\lambda}^{\mu\nu} \nabla_{\omega} p_{\mu\nu} - a_{\omega}^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} p_{\mu\nu} = \\ & = \left(\nabla_{\lambda} a_{\omega}^{\mu\nu} - \nabla_{\omega} a_{\lambda}^{\mu\nu} + a_{\lambda}^{\nu} \nabla_{\tau} a_{\omega}^{\mu\tau} - a_{\omega}^{\nu} \nabla_{\tau} a_{\lambda}^{\mu\tau} \right) p_{\mu\nu} + \nabla_{\lambda} T_{\omega} - \nabla_{\omega} T_{\lambda}. \end{aligned}$$

Le (20) e (17) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali (del 1° ordine lineari) nelle $p_{\mu\nu}$: unite alla (18) e alle condizioni di apolarità di F_2 , F_3 esse formano le condizioni necessarie e sufficienti per l'effettiva esistenza di una superficie, per la quale siano assegnati i tensori $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu\nu}$, $p_{\lambda\mu}$. È possibile però in gene-

rale — come è noto — di ricavare, dal sistema delle condizioni ora dette e delle loro conseguenze differenziali, anche le espressioni delle $p_{\lambda\mu}$ in termini finiti.

Su questo tornerò nel prossimo lavoro, a cui ho già avuto occasione di accennare.

Mi limiterò qui ad osservare che le (20) e le (17) ammettono la soluzione $p_{\lambda\mu} = 0$ se si ha

$$(21) \quad T_{\omega} = 0.$$

e allora soltanto. Si ritrova così un risultato di geometria delle superficie in E_3 affine, dovuto a RADON ⁽⁵⁾:

L'annullarsi del vettore T è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una superficie di E_3 affine che ammetta F_2 ed F_3 come forme fondamentali (secondo BLASCHKE e PICK) di una geometria affine. In effetto, le (21) equivalgono appunto, come si verifica agevolmente, alle condizioni indicate dal RADON ⁽⁶⁾.

6. Queste condizioni (21) di RADON e così le (18), che in un certo senso, ne tengono il luogo nella geometria proiettiva, si possono ottenere sotto forma particolarmente semplice usando la derivazione covariante ∇_{λ}^* che corrisponde alla connessione affine di componenti relative (rispetto alla connessione ∇_{λ}) $a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma}$: connessione che ha le rette αX (le *normali proiettive*, se le coordinate sono normalizzate secondo FUBINI) come pseudonormali ⁽⁷⁾:

$$(22) \quad \begin{cases} \nabla_{\mu}^* v^{\lambda} = \nabla_{\mu} v^{\lambda} + a_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda} v^{\nu} \\ \nabla_{\mu}^* w_{\lambda} = \nabla_{\mu} w_{\lambda} - a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} w_{\gamma}. \end{cases}$$

Si vede subito che

$$(23) \quad \begin{aligned} \nabla_{\nu}^* a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} &= -2a_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\gamma}, \quad \nabla_{\nu}^* a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} = 2a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma}, \\ \nabla_{\nu}^* a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega} &= \nabla_{\nu} a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega} - a_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\tau} a_{\tau\mu}^{\cdot\cdot\omega} - a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} a_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot\omega} + a_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\omega} a_{\tau\mu}^{\cdot\cdot\tau}, \\ \nabla_{\tau}^* a_{\omega}^{\cdot\cdot\mu\tau} &= \nabla_{\tau} a_{\omega}^{\cdot\cdot\mu\tau}; \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ J. RADON, *Ueber affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie*. (« Berichte sächs. Gesellschaft der Wiss. », Leipzig, 70, (1918), pp. 91-107), p. 99.

⁽⁶⁾ RADON, l. c. ⁽⁵⁾, p. 99; (A. D., p. 158, form. 155).

⁽⁷⁾ Anche il BERWALD (A. D., p. 169) ha fatto uso, per la geometria affine delle ipersuperficie in E_{n+1} , di questa connessione.

ciò posto, si ha facilmente

$$(24) \quad T_{\omega} = -\frac{1}{2} \{ \nabla_{\mu}^* \nabla_{\tau}^* a_{\omega}^{\mu\tau} + \nabla_{\omega}^* (J + K) \}.$$

Ma se indichiamo con

$$(25) \quad \begin{aligned} R_{\lambda\omega\mu\tau}^* &= A_{\lambda\omega\mu\tau} + R_{\lambda\omega\mu\tau}, \\ R_{\omega\mu}^* &= R_{\lambda\omega\mu}^{*\lambda}, \quad R^* = a^{\omega\mu} R_{\omega\mu}^* = -2K^* \end{aligned}$$

le grandezze di curvatura della connessione ∇_{λ}^* , abbiamo

$$(26) \quad R_{\omega}^{*\mu} = -\nabla_{\tau}^* a_{\omega}^{\mu\tau} - a_{\omega}^{\mu}(J + K), \quad K^* = J + K,$$

dunque la (24) diviene semplicemente

$$(27) \quad T_{\omega} = \frac{1}{2} \nabla_{\mu}^* R_{\omega}^{*\mu},$$

e la condizione (18) [tenendo presente la seconda delle (23)] prende la forma

$$(28) \quad \nabla_{\nu}^* a^{\nu\omega} \nabla_{\mu}^* R_{\omega}^{*\mu} = 0.$$

Se indichiamo con $\mathfrak{R}^*$ l'omografia vettoriale di componenti $R_{\omega}^{*\mu}$, le (27) e (28) possono scriversi:

$$(29) \quad T_{\omega} = \frac{1}{2} \text{grad}^* \mathfrak{R}^* \text{ } ^{(\circ)},$$

$$(30) \quad \text{div}^* \text{grad}^* \mathfrak{R}^* = 0,$$

ove gli operatori differenziali div^* e grad^* s'intendono calcolati con la derivazione ∇_{λ}^* .

La condizione (21) del RADON e la (18) sono così poste sotto forme notevolmente espressive: riducendosi esse, rispettivamente, all'annullarsi di $\text{grad}^* \mathfrak{R}^*$, oppure, di $\text{div}^* \text{grad}^* \mathfrak{R}^*$.

7. Porremo ora la (18) sotto una nuova forma, in cui si manifesta come essa sia una relazione tra gli invarianti del 1°, 2°, 3° e 4° ordine dell'elemento lineare proiettivo.

Limitiamoci, per semplicità, al caso in cui le coordinate sono *normalizzate* secondo FUBINI, cioè, è $J = -1$.

(^o) Uso la notazione *grad* $\mathfrak{R}$ di BURALI-FORTI e MARCOLONGO anziché la notazione *div* $\mathfrak{R}$ di VOIGT, usata in generale, ad es., dai relativisti.

Introduciamo il tensore ψ_λ (CECH) dato da

$$(31) \quad 2J\psi^\alpha = a^{\omega\mu\nu} \nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha} - a^{\alpha\mu\nu} \nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega} \quad (9).$$

Per $J = -1$ è

$$\psi_\lambda = a_\lambda^{\cdot\mu\nu} \nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega}, \quad \nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega} = \psi_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega};$$

si ha allora

$$(32) \quad -2T_\omega = a_\omega^{\cdot\tau\mu} (\nabla_\mu \psi_\tau + \psi_\mu \psi_\tau) + \nabla_\omega K - \psi_\omega.$$

Ricordando poi le espressioni (CECH) degli invarianti del 1° e del 2° ordine

$$(33) \quad \Psi = a^{\lambda\mu\nu} \psi_\lambda \psi_\mu \psi_\nu, \quad -3K = a^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \psi_\mu, \quad \Theta = a^{\lambda\mu\nu} \nabla_\lambda \psi_\mu \cdot \psi_\nu,$$

e introducendo l'invariante del 3° ordine

$$(34) \quad P = a^{\lambda\mu\nu} \Delta_\lambda \Delta_\mu \psi_\nu$$

si ha infine per la (18) la forma che volevamo stabilire:

$$(35) \quad \Delta_\lambda K + P + 3(\Theta + K) + \Psi = 0.$$

8. Veniamo infine al caso in cui la superficie sia riferita a coordinate normali, e a parametri asintotici. In tale ipotesi si ha agevolmente, posto (cfr. G. P. D., p. 697) $p_{11} = n$, $p_{22} = v$, e $\nabla_1 n = n_2$, $\nabla_1 v = v_1$,

$$(36) \quad \begin{aligned} n_2 &= T_1 \beta_\gamma = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(\beta \psi_2)}{\partial v} + \beta_\gamma \left(\frac{\partial K}{\partial u} - \psi_1 \right) \right\}, \\ v_1 &= T_2 \beta_\gamma = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(\gamma \psi_1)}{\partial u} + \beta_\gamma \left(\frac{\partial K}{\partial v} - \psi_2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Dunque le espressioni

$$(37) \quad \frac{n_2}{\beta_\gamma} - \frac{v_1}{\beta_\gamma}$$

sono le componenti di un vettore, di significato intrinseco alla superficie e invariante per applicabilità proiettive: vettore la cui divergenza (calcolata nella metrica asintotica) è nulla.

Bologna, settembre 1928.

(9) Ved. G. P. D., p. 306, e la form. (5), pag. 163 della mia Nota: *Su una formula di geometria proiettiva-differenziale delle superficie e le sue applicazioni nella geometria metrica*. (« Atti Accad. di Torino », vol. 63, 1928, pp. 161-170).