Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Guido Fubini

Sugli invarianti di un'equazione di Laplace

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **7** (1928), n.4, p. 175–177.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_175_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Sugli invarianti di un'equazione di Laplace.

Nota di GUIDO FUBINI (a Torino).

Sia data un'equazione:

(1) $Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_x + Ez_y + Fz = 0$; (ove $B^2 - AC \neq 0$),

essa, assumendo a nuove variabili ξ, η le variabili caratteristiche, si può ridurre alla forma abituale

(2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial z}{\partial\xi} + b\frac{\partial z}{\partial\eta} + cz = 0.$$

Gli invarianti di Laplace

$$I_1 = c - a_\xi - ab; \quad I_2 = c - b_\eta - ab$$

della (2) *non si possono calcolare,* se è data la (1), *senza integrare le equazioni delle sue caratteristiche.* Mi sembra interessante e credo nuova l'osservazione che le *forme associate* $I_1 d\xi d\eta$, $I_2 d\xi d\eta$ *sono invece calcolabili algebricamente se è data la* (1). Tali forme hanno significato *intrinseco*, cioè indipendente dalla scelta dei parametri ξ, η delle caratteristiche. Poniamo, indicando con ρ, σ funzioni per ora arbitrarie:

$$U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad V = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\xi}. \tag{3}$$

Con questa definizione degli *operatori* U, V, la (2) si scrive:

$$V(Uz) + lV(z) + mU(z) + nz = 0, \qquad \left[l = \frac{a}{\rho};\ m = \frac{b}{\sigma} + \frac{V(\rho)}{\rho};\ n = \frac{c}{\rho\sigma}\right] \tag{4}$$

ossia

$$V(Uz + lz) + m(Uz + lz) + K_1 z = 0.$$

Si è posto:

$$K_1 = n - V(l) - lm = \frac{I_1}{\rho\sigma};$$

si noti che K_1 si calcola, appena siano dati i coefficienti l, m, n della (4). Invece, senza conoscere ρ, σ, non si può in tale ipotesi calcolare $I_1 = \rho\sigma K_1$. Poniamo:

$$U = \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad V = \mu_2 \frac{\partial}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{3bis}$$

$$(\mu_i,\ \nu_i \text{ funzioni di } x,\ y)$$

donde, per le (3):

$$d\xi = \frac{1}{\sigma\Delta}(\nu_1 dx - \mu_1 dy), \quad d\eta = \frac{1}{\rho\Delta}(\mu_2 dy - \nu_2 dx) \text{ (1)}; \quad \Delta = \mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2. \tag{5}$$

Se ne deduce che la prima forma associata vale

$$I_1 d\xi d\eta = K_1 \rho\sigma d\xi d\eta = \frac{K_1}{\Delta^2}(\nu_1 dx - \mu_1 dy)(\mu_2 dy - \nu_2 dx). \tag{6}$$

Applichiamo questo risultato alla (1). Se $\nu_i : \mu_i$ sono (per $i = 1, 2$) le radici della equazione $A\nu^2 - 2B\nu\mu + C\mu^2 = 0$ omogenea di 2° grado che definisce le caratteristiche della (1), potremo normare le μ, ν in guisa che:

$$A = \mu_1\mu_2; \quad 2B = \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1; \quad C = \nu_1\nu_2; \quad 4(B^2 - AC) = \Delta^2$$

(1) Ora le ρ, σ devono soddisfare alle condiz. d'integrab. delle (5

(anzi rimane ancora una certa arbitrarietà, in quanto che si possono moltiplicare le μ_1, ν_1 per uno stesso fattore, le μ_2, ν_2 per il fattore reciproco). La (1) si può scrivere, per le (3^{bis})

$$VUz + (D - V\mu_1)z_x + (E - V\nu_1)z_y + Fz = 0$$

ossia

$$V(Uz) + LVz + MUz + Fz = 0$$

oppure

$$U(Vz) + L'Vz + M'Uz + Fz = 0,$$

ove:

$$L = \frac{1}{\Delta}\left\{(D - V\mu_1)\nu_1 - (E - V\nu_1)\mu_1\right\}$$

$$L' = \frac{1}{\Delta}\left\{(D - U\mu_2)\nu_1 - (E - U\nu_2)\mu_1\right\}$$

$$M = \frac{1}{\Delta}\left\{(E - V\nu_1)\mu_2 - (D - V\mu_1)\nu_2\right\}$$

$$M' = \frac{1}{\Delta}\left\{(E - U\nu_2)\mu_2 - (D - U\mu_2)\nu_2\right\}.$$

La prima forma associata vale dunque, in virtù di (6):

$$(F - V(L) - LM)\frac{1}{\Delta^2}(\nu_1 dx - \mu_1 dy)(\mu_2 dy - \nu_2 dx).$$

la seconda:

$$(F - U(M') - L'M')\frac{1}{\Delta^2}(\nu_1 dx - \mu_1 dy)(\mu_2 dy - \nu_2 dx),$$

che si deduce dalla precedente scambiando ν_1 *con* ν_2, μ_1 *con* μ_2 *e quindi* U *con* V, Δ *con* $-\Delta$, L *con* M'. Esse *si calcolano con la semplice risoluzione dell'equaz. di 2° grado* $A\nu^2 - 2B\nu\mu + C\mu^2 = 0$ (e diventano molto semplici se si suppone la (1) moltiplicata per un tale fattore che $4(B^2 - AC) = \Delta^2 = 1$).

Osservazione. — Si notino, per finire, le seguenti identità che possono semplificare il calcolo delle forme associate:

$$(\nu_1 dx - \mu_1 dy)(\mu_2 dy - \nu_2 dx) = -Cdx^2 + 2Bdxdy - Ady^2$$

$$LM = \frac{1}{\Delta^2}\left\{-C(D - V\mu_1)^2 + 2B(D - V\mu_1)(E - V\nu_1) - A(E - V\nu_1)^2\right\}$$

(e analoga per $L'M'$).

$$V(L) = V(\nu_1 D - \mu_1 E) + \mu_1 V^2\nu_1 - \nu_1 V^2\mu_1 \qquad (\text{se } \Delta = 1)$$

[e analoga per $U(M')$].