Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Vitali

Sulla curvatura delle varietà

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.4, p. 173–175.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1928.

PICCOLE NOTE

Sulla curvatura delle varietà.

Nota di GIUSEPPE VITALI (a Padova).

In un recente lavoro [1] io ho rappresentato con J_2, per ogni varietà dello spazio hilbertiano, un certo *invariante*, del quale ho detto che « si presenta, almeno analiticamente, come la più naturale estensione alle varietà a più dimensioni dell'*invariante di Gauss* (curvatura totale) delle superficie, e che probabilmente apparirà tale anche dal punto di vista geometrico ».

Ricordo che cosa è J_2. Per ogni varietà V_n ad n dimensioni dello spazio hilbertiano, indichiamo con a il discriminante della forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} du_r du_s \tag{1}$$

che dà il quadrato dell'elemento lineare di V_n, e con R il determinante di ordine $n(n-1):2$ che ha per elementi i simboli di RIEMANN di prima specie (rs, pq), ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie rs e pq tutte le combinazioni semplici a due a due dei numeri

$$1, 2 \ldots, n,$$

scritte con $r < s$ e $p < q$, e mettendo in una medesima riga gli (rs, pq) colla stessa coppia rs, ed in una stessa colonna tutti gli (rs, pq) che hanno la stessa coppia pq.

È

$$J_2 = R : a^{n-1}.$$

Ora io voglio dimostrare che, come per le superficie dello spazio ordinario l'invariante J_2 è uguale al prodotto delle due curvature

[1] G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*, (« Annales de la Société Polonaise de Math. », Cracovia, T., VII, 1928, pp. 43-67).

principali ([1]), un significato analogo ha J_2 per le varietà V_n col σ_2 ([2]) ad $n+1$ dimensioni.

***

Infatti, se

$$f = f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad ([3])$$

con f funzione di t a quadrato sommabile in un certo aggregato g, e derivabile in là quanto occorre rispetto alle u, è l'equazione di una varietà V_n ad n dimensioni col σ_2 ad $n+1$ dimensioni, indicato con X un parametro normale della perpendicolare a V_n, giacente in σ_2, si ha

$$f_{rs} = b_{rs} X, \quad ([4]) \tag{2}$$

dove f_{rs} indica la derivata seconda covariante di f rispetto alla forma (1), e b_{rs} è un covariante di RICCI a due indici.

La geodetica tangente alla direzione du_1, du_2,.... du_n ha la curvatura data da

$$\varkappa = (\sum_1^n {}_{rs} b_{rs} du_r du_s) : (\sum_1^n {}_{rs} a_{rs} du_r du_s) \quad ([5]).$$

I massimi ed i minimi di queste curvature saranno dati dai valori di $\varkappa$ che soddisfano l'equazione

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \varkappa a_{11} & b_{12} - \varkappa a_{12} & \dots & b_{1n} - \varkappa a_{1n} \\ b_{21} - \varkappa a_{21} & b_{22} - \varkappa a_{22} & \dots & b_{2n} - \varkappa a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \varkappa a_{n1} & b_{n2} - \varkappa a_{n2} & \dots & b_{nn} - \varkappa a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad ([6]).$$

Queste curvature si possono assumere come *curvature principali* ed il loro prodotto vale $\frac{b}{a}$, dove b è il valore del determinante $|b_{rs}|$.

([1]) Vedi L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 3ª edizione, vol. I, pag. 196. Nel seguito questo libro sarà indicato con B.

([2]) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*, « Atti del R. Istituto Veneto », T., LXXXVII, 1927-28, pag. 395. Nel seguito indicherò questa Memoria con H.

([3]) Vedi H, pag. 391.

([4]) Vedi H, pag. 400.

([5]) Vedi H, pag. 379 e pag. 426, e la (2) del testo.

([6]) Vedi per questo le considerazioni per la determinazione delle curvature principali per le V_n giacenti in uno spazio euclideo ad $n+1$ dimensioni, in B, vol. II, parte II, pag. 460.

Ora ricordiamo che

$$(rs, pq) = \int_g f_{rp} f_{sq} dt - \int_g f_{rq} f_{sp} dt \quad (^1)$$

ed osserviamo che da questa e per la (2) si ha

$$(rs,\ pq) = b_{rp} b_{sq} - b_{rq} b_{sp}.$$

Allora R è un determinante di Spottiswoode [2] e vale b^{n-1}.
Si conclude che

$$J_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$$

e quindi che J_2 è la potenza $(n-1)^{ma}$ del prodotto delle n curvature principali.

In altri termini si ha il

Teorema. — Se una varietà V_n ha il σ_2 ad $n+1$ dimensioni, il prodotto delle sue n curvature principali è uguale alla radice $(n-1)^{ma}$ del suo invariante J_2.

Possiamo notare che

$$\sqrt[n-1]{J_2} = \frac{\sqrt[n-1]{R}}{a}.$$

(1) Vedi H, pag. 394.

(2) E. Pascal, *I determinanti*. Editore Hoepli. Milano. 2a edizione, pp. 132-135.