

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UMI

## Corrispondenza

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **7** (1928), n.3, p. 162–163.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_162_0)  
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1928\\_1\\_7\\_3\\_162\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_162_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

# CORRISPONDENZA

## RISPOSTE

34. Indico con  $M$  la media di  $f(x)$  in  $(a, b)$ :

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Divido poi  $(a, b)$  in  $n$  parti uguali  $\lambda_r$ , ed indico con  $M_r$  la media di  $f(x)$  in  $\lambda_r$ :

$$M_r = \frac{1}{\lambda_r} \int_{\lambda_r} f(x) dx.$$

Ora è

$$(1) \quad (b-a)M = \int_a^b f(x) dx = \sum_{r=1}^n \int_{\lambda_r} f(x) dx = \sum_{r=1}^n \lambda_r M_r,$$

e possono darsi due casi:

1°) C'è una  $M_r = M$ : allora il teorema è dimostrato.

2°) Esiste almeno un  $M_r < M$  ed almeno un  $M_r > M$ ; perchè, se fosse sempre  $M_r < M$ , sarebbe

$$\sum_1^n \lambda_r M_r < M(b-a),$$

contro la (1), e se fosse sempre  $M_r > M$ , sarebbe

$$\sum_1^n \lambda_r M_r > M(b-a),$$

ancora contro la (1). Indichiamo con  $c_1$  e  $c_2$  i centri di  $\lambda_r$ , e  $\lambda_{r_1}$ .

Consideriamo poi, per ogni punto  $c$  di  $\left(a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}\right)$ , l'integrale  $I(c)$  della  $f(x)$  esteso all'intervallo  $\lambda$  di centro  $c$  ed ampiezza  $\frac{b-a}{n}$  (che è uguale a  $\lambda_r$ ). Questo integrale è funzione continua di  $c$ ,

e siccome per  $c = c_1$  assume il valore  $\frac{b-a}{n} M_{r_1} < \frac{a-b}{n} M$ , e per  $c = c_2$  il valore  $\frac{b-a}{n} M_{r_2} > \frac{b-a}{n} M$ , per un certo  $c$  compreso fra  $c_1$  e  $c_2$  è

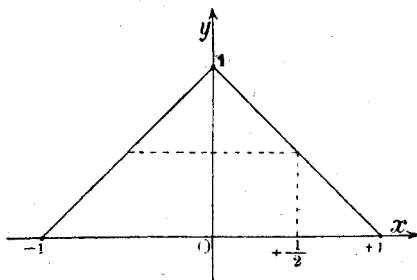
$$I(c) = \frac{b-a}{n} M.$$

L'intervallo  $\lambda$  di centro  $c$  è dunque di ampiezza  $\frac{b-a}{n}$ , ed in esso la media di  $f(x)$  è esattamente uguale ad  $M$ .

Con ciò il teorema è dimostrato.

La dimostrazione si estende immediatamente al caso di più variabili, ossia ad una  $S_{(r)}$  con  $r > 1$ .

*Osservazione.* — Se prendiamo un numero  $\lambda$  positivo e  $< b-a$ , ma qualunque, può non esistere alcun intervallo parziale di  $(a, b)$  di



lunghezza  $\lambda$  su cui la media di  $f(x)$  sia uguale alla media in  $(a, b)$ . Per esempio, sia  $f(x)$  rappresentata su  $(-1, +1)$  dalla spezzata qui disegnata. La sua media su  $(-1, +1)$  è  $\frac{1}{2}$ . Prendiamo  $\lambda = \frac{3}{2}$ . Il valore minimo della media su un intervallo di  $(-1, +1)$  di ampiezza  $\frac{3}{2}$  si ha per l'intervallo  $\left(-1, +\frac{1}{2}\right)$ , ove tale media è  $\frac{7}{12} > \frac{1}{2}$ : dunque in nessun intervallo di  $(-1, +1)$  di ampiezza  $\frac{3}{2}$  la media della  $f(x)$  uguaglia quella della  $f(x)$  in  $(-1, +1)$ . l. t.