Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Pia Nalli

Sopra due dimostrazioni nel calcolo assoluto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 124–127.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_124_0>

Sopra due dimostrazioni nel calcolo assoluto.

Nota di PIA NALLI (a Catania).

Nella presente Nota diamo due dimostrazioni che potrebbero sostituire, col vantaggio di una maggiore semplicità, due altre contenute nelle *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* del prof. LEVI-CIVITA [1].

Siano V_n e V'_n due varietà metriche i cui punti si corrispondano biunivocamente e siano

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

$$ds'^2 = \sum_1^n {}_{ik}\, a'_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

i quadrati dei loro elementi lineari.

Denotando con

$$\left\{ \begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix} \right\}'$$

i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie rispettivamente per la V_n e la V'_n, è noto che la loro differenza

$$\left\{ \begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix} \right\}$$

è un tensore ε_{ih}^{r}, covariante rispetto agli indici i, h e controvariante rispetto all'indice r [2].

[1] Roma, (Stock), 1925.

[2] Cfr. l. c., p. 228.

Il modo più semplice per dimostrare ciò è di considerare un sistema semplice covariante A_i, funzione di $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e formare la differenza delle sue derivate covarianti, una $A_{i|h}$ rispetto a V_n, e l'altra $(A_{i|h})'$ rispetto a V'_n.

Essendo

$$A_{i|h} = \frac{\partial A_i}{\partial x_h} - \sum_1^n {}_r \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} A_r,$$

$$(A_{i|h})' = \frac{\partial A_i}{\partial x_h} - \sum_1^n {}_r \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}' A_r,$$

avremo

$$A_{i|h} - (A_{i|h})' = \sum_1^n {}_r \left[\left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} \right] A_r$$

la quale dimostra che $\left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}$ è un tensore ρ_{ih}^r.

La prima dimostrazione alla quale abbiamo alluso è quella che si riferisce alla espressione della differenza dei due simboli di RIEMANN di seconda specie per le due varietà.

Denotando tali simboli con

$$\{ir, hk\} \quad \text{ed} \quad \{ir, hk\}'$$

si tratta di far vedere che

$$\{ir, hk\}' - \{ir, hk\} = \rho_{ih|k}^r - \rho_{ik|h}^r - \sum_1^n {}_l \left(\rho_{lh}^r \rho_{ik}^l - \rho_{lk}^r \rho_{ih}^l \right). \tag{1}$$

dove $\rho_{ih|k}^r$ è il derivato covariante di ρ_{ih}^r come referenza alla metrica di V_n (¹).

La dimostrazione della (1) per due punti corrispondenti in V_n, V'_n è immediata, quando si scelgono coordinate x_i geodetiche nel punto di V_n che si prende in considerazione.

Infatti. in tale ipotesi è

$$\left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} = 0, \qquad \rho_{hi}^r = \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}'.$$

$$\{ir, hk\} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ r \end{matrix} \right\}.$$

$$\{ir, hk\}' = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ r \end{matrix} \right\}' -$$

$$- \sum_1^n {}_l \left[\left\{ \begin{matrix} l\ h \\ r \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ l \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} l\ k \\ r \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ l \end{matrix} \right\}' \right],$$

(¹) Cfr. l. c., pp. 232-236.

quindi

$$|ir, hk|' - |ir, hk| = \frac{\partial}{\partial x_k} \rho_{ih}^{r} - \frac{\partial}{\partial x_h} \rho_{ik}^{r} - \sum_{1}^{n}{}_l \left(\rho_{lh}^{r} \rho_{ik}^{l} - \rho_{lk}^{r} \rho_{ih}^{l} \right).$$

Ma per la scelta particolare delle coordinate

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \rho_{ih}^{r} = \rho_{ih/m}^{r}:$$

resta quindi dimostrata la (1).

La seconda dimostrazione riguarda l'annullarsi di un sistema quadruplo $B_{ij,\,hk}$ che goda delle proprietà dei simboli di RIEMANN di prima specie, quando la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{ijhk} B_{ij,\,hk} u^i v^j u^h v^k \tag{2}$$

si annulla qualunque sieno le u e le v (¹).

Le proprietà alle quali alludiamo sono le seguenti:

$B_{ij,hk}$ è emisimmetrico rispetto ad ogni coppia ij, hk:

$$B_{ij,\,hk} = - B_{ji,\,hk} = - B_{ij,\,kh};$$

gode della proprietà ciclica

$$B_{ij,\,hk} + B_{hj,\,ki} + B_{kj,\,ih} = 0. \tag{3}$$

Come conseguenza si ha

$$B_{ij,\,hk} = B_{hk,\,ij}.$$

Fissate le u, poniamo

$$A_{jk} = \sum_{1}^{n}{}_{ih} B_{ij,\,hk} u^i u^h:$$

il sistema doppio A_{jk} è simmetrico.

Infatti

$$A_{kj} = \sum_{1}^{n}{}_{ih} B_{ik,\,hj} u^i u^h = \sum_{1}^{n}{}_{ih} B_{hj,\,ik} u^h u^i = A_{jk}.$$

Ne viene che se la (2) è nulla qualunque sieno le u e le v, cioè se

$$\sum_{1}^{n}{}_{jk} A_{jk} v^j v^k = 0,$$

sarà

$$A_{jk} = 0$$

qualunque sieno le u.

(¹) Cfr. l. c., pp. 243-244.

Ciò porta come conseguenza

$$B_{ij,\,ik} = 0$$

e, per $i \neq h$,

$$B_{ij,\,hk} + B_{hj,\,ik} = 0. \tag{4}$$

Permutando in questa due volte circolarmente gli indici i, h, k

$$B_{kj,\,ih} + B_{ij,\,kh} = 0$$

che scriviamo

$$B_{ij,\,hk} - B_{kj,\,ih} = 0. \tag{5}$$

Tenendo ora conto della (3), che possiamo scrivere

$$B_{ij,\,hk} - B_{hj,\,ik} + B_{kj,\,ih} = 0$$

sommando con (4) e (5) troviamo

$$B_{ij,\,hk} = 0.$$

Catania, maggio 1928.