Bollettino Unione Matematica Italiana

Pia Nalli

Sulla definizione di coppia di funzioni di due variabili a variazione limitata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 121–124.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

PICCOLE NOTE

Sulla definizione di coppia di funzioni di due variabili a variazione limitata.

Nota di PIA NALLI (a Catania).

La lettura di una recente Nota del prof. TONELLI [1] mi suggerisce le seguenti considerazioni.

Nella definizione di *coppia di funzioni di due variabili a variazione limitata in un dominio,* introdotta dal collega ANDREOLI e da me [2], ciò che vi è di essenziale è il concetto di *incremento della coppia in un dominio,* corrispondente all'incremento di una funzione di una variabile in un intervallo.

Come quest'ultimo fa intervenire solo i valori che la funzione prende negli estremi dell'intervallo, così noi abbiamo cercato per il primo una definizione che facesse intervenire solo i valori delle funzioni lungo la frontiera del dominio.

Supposte le funzioni $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ definite in un dominio D di frontiera C, noi abbiamo chiamato incremento della coppia (φ, ψ) in D l'espressione

$$\Delta_D(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\int_C (\varphi d\psi - \psi d\varphi)$$

precisando nel seguente modo il significato del secondo membro: la curva C del piano (u, v) si suppone rettificabile; rappresentandola per mezzo delle equazioni parametriche

$$u = f(t), \quad v = g(t),$$

dove i secondi membri sono funzioni a variazione limitata nell'intervallo dove sono definite, le funzioni $\varphi[f(t), g(t)]$, $\psi[f(t), g(t)]$

[1] *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata.* « Rend. della R. Accademia dei Lincei », serie 6ª, vol. 7°, 1928, pp. 357-363.

[2] P. NALLI e G. ANDREOLI, *Sull'area di una superficie. ecc.* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », tomo LII, 1928, pp. 30-43.

risultano a variazione limitata nel medesimo intervallo ed i due integrali

$$\int_C \varphi d\psi, \quad \int_C \psi d\varphi$$

hanno il significato di integrali di STIELTJES.

Ma è evidente che si potevano imporre condizioni meno restrittive per arrivare ad una definizione di incremento della coppia da potersi ritenere soddisfacente.

Per esempio, basterebbe supporre una sola delle funzioni $\varphi[f(t), g(t)]$, $\psi[f(t), g(t)]$ a variazione limitata e chiamare incremento della coppia uno dei due integrali

$$\int_C \varphi d\psi, \quad -\int_C \psi d\varphi.$$

Si potrebbe generalizzare ancora e supporre che la curva C possa dividersi in un numero finito di archi sopra ciascuno dei quali una delle funzioni φ, ψ sia a variazione limitata ed assumere come incremento della coppia la somma di espressioni del tipo $\int \varphi d\psi$, $-\int \psi d\varphi$ per le varie parti in cui C è divisa, aggiungendo o togliendo per ogni punto di divisione di C il prodotto $\varphi\psi$ calcolato nel detto punto.

Ma fermiamoci alla prima generalizzazione e passiamo in corrispondenza alla definizione di coppia di funzioni a variazione limitata in un dominio D.

Potremmo procedere nel seguente modo: ammesso che per ogni dominio D' contenuto in D, limitato da una curva continua, semplice, rettificabile la coppia (φ, ψ) ammetta un incremento, e diviso D in dominî parziali D' in un numero finito, si formi la somma

$$\Sigma_{D'} \mid \Delta(\varphi, \psi) \mid :$$

si dirà che la coppia è a variazione limitata quando tale somma si mantiene limitata, chiamando variazione totale della coppia in D l'estremo superiore di tale somma.

In questa definizione si lascia al reticolo dei dominî D' la massima generalità per arrivare ad una definizione indipendente dal cambiamento delle variabili (u, v) in un gruppo molto largo.

Ma non volendo preoccuparsi di ciò, volendo dare una definizione che si applichi alle φ e ψ in quanto funzioni di quelle tali variabili (u, v), si potrebbe particolareggiare il reticolo D', costruendolo, per esempio, per mezzo di due sistemi di rette parallele agli assi u e v.

Salvo poi a far vedere che, se non sempre, almeno sotto condizioni molto larghe ciò non lede la generalità.

Passando poi alla definizione di area di una superficie data sotto forma parametrica, si potrebbe adottare la stessa definizione da noi data nella Nota citata, col solo cambiamento della definizione dell' incremento di una coppia.

Naturalmente tale definizione resta subordinata alla scelta degli assi, ma è probabile che si riesca a dimostrare che effettivamente non è così, ed è anche probabile che ci si possa limitare a prendere in considerazione reticoli di dominî formati per mezzo di due sistemi di rette parallele agli assi delle variabili.

Il caso particolare della superficie data sotto forma esplicita

$$z = f(x, y),$$

nel quale la definizione si riduce a quella del prof. TONELLI, equivalente all' altra del LEBESGUE, fa pensare che molto interesse potrebbe presentare lo studio del problema generale.

La seconda forma data dal prof. TONELLI alla sua definizione di funzione di due variabili a variazione limitata, mette in luce l' importanza che può avere l' introduzione del concetto di incremento di una coppia di funzioni di due variabili in un dominio, secondo la definizione più generale qui introdotta. Tale introduzione non solo permette di liberare la prima forma della definizione del prof. TONELLI da ciò che la appesantiva, ma la rende anche perfettamente analoga alla definizione di funzione di una variabile a variazione limitata in un intervallo. Permette ancora l' estensione della definizione ad una funzione di quante si vogliano variabili, perchè, come abbiamo accennato nella Nota citata, si può in generale definire l' incremento in un dominio ad n dimensioni di una n-pla di funzioni di n variabili, introducendo gli integrali di STIELTJES multipli. Cosicchè sembra indubbio che tra tutte le definizioni di funzione di due variabili a variazione limitata, introdotte da varî analisti, quella del prof. TONELLI sia destinata ad essere adottata definitivamente.

Si potrebbe anche dare un' altra definizione di coppia di funzione a variazione limitata in un dominio, arrivando sempre alla definizione del prof. TONELLI di funzione di due variabili a variazione limitata. Definito comunque l' incremento di una coppia di funzioni in un dominio che ammetta un' area secondo una qualsiasi definizione, dire che la coppia (φ, ψ) è a variazione limitata in un dominio D quando, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$ si può dividere D in dominî parziali D', ciascuno di area minore di ε, in ognuno dei quali la coppia (φ, ψ) ammetta un incremento e si mantenga limitata la somma dei valori assoluti di tali incrementi. Chiamare poi variazione totale di (φ, ψ) in D l'estremo superiore di tale somma.

Più generalmente, si potrebbero prendere in considerazione solo reticoli di dominî D' formati con due sistemi di parallele agli assi delle variabili ed in tal caso, prendendo come definizione di incremento di una coppia quella introdotta dal collega ANDREOLI e da me, si arriverebbe alla definizione del prof. TONELLI.

Queste considerazioni mostrano come possa riuscire feconda la introduzione nell'analisi del concetto di incremento in un dominio ad n dimensioni di una n-pla di funzioni di n variabili.

Catania, maggio 1928.