Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Manarini

Sulle direzioni unite delle dilatazioni in un S_n euclideo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 98–100.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_98_0>

Sulle direzioni unite delle dilatazioni in un S_n euclideo.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna).

È noto che una dilatazione β in uno spazio euclideo S_n ammette sempre almeno n direzioni unite. La dimostrazione è fondata sulla considerazione delle radici dell'equazione

$$I_n(\beta - x) = 0$$

che corrisponde all'equazione secolare. La cosa è immediata nel caso delle radici semplici; richiede qualche attenzione nel caso della radice doppia Noi vogliamo considerare qui questo caso, per mostrare come possa essere trattato rigorosamente e direttamente con l'analisi vettoriale.

Anzitutto stabiliamo una formula che estende alle n dimensioni una formula nota, relativa allo spazio S_3.

Essendo α un' omografia qualunque in uno spazio S_n, per l'$I_1 K\alpha$ si ha l'espressione [1]

$$V(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) \cdot I_1 K\alpha = V(K\alpha \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) + \\ + V(\boldsymbol{u}_n, K\alpha \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) + \ldots + V(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots K\alpha \boldsymbol{u}_{n-1})$$

ove $\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}$ è una ennupla di vettori tali che sia

$$V(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) \neq 0.$$

Usando l'operatore E l'uguaglianza scritta diviene

$$E(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) \times \boldsymbol{u}_n \cdot I_1 K\alpha = E(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) \times K\alpha \boldsymbol{u}_n + \\ + E(K\alpha \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}) \times \boldsymbol{u}_n + \ldots + E(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \ldots K\alpha \boldsymbol{u}_{n-1}) \times \boldsymbol{u}_n.$$

(1) Per il significato dei simboli, cfr. *Complementi di Analisi vettoriale* del prof. BURGATTI. Ediz. litografata.

Ricordando che $I_1 k\alpha = I_1\alpha$ e che $a \times k\alpha b = \alpha a \times b$ abbiamo

$$I_1\alpha \cdot E(u_1 . u_2 \dots u_{n-1}) \times u_n = \alpha E(u_1 . u_2 \dots u_{n-1}) \times u_n + \\ + E(K\alpha u_1 . u_2 \dots u_{n-1}) \times u_n + \dots + E(u_1 . u_2 \dots K\alpha u_{n-1}) \times u_n$$

la quale dovendo valere qualunque sia il vettore u_n dà la formula cercata:

$$\alpha E(u_1 , u_2 \dots . u_{n-1}) = I_1\alpha \cdot E(u_1 , u_2 \dots u_{n-1}) - \\ - E(K\alpha u_1 . u_2 \dots u_{n-1}) - \dots - E(u_1 , u_2 \dots K\alpha u_{n-1}. \tag{1}$$

Nel caso delle tre dimensioni la (1) diviene

$$\alpha E(u_1 . u_2) = I_1\alpha \cdot E(u_1 . u_2) - E(K\alpha u_1 , u_2) - E(u_1 ; K\alpha u_2)$$

ossia, con altra scrittura,

$$\alpha(u_1 \wedge u_2) = I_1\alpha \cdot (u_1 \wedge u_2) - K\alpha u_1 \wedge u_2 - u_1 \wedge K\alpha u_2$$

che è la formula [I] di pag. 36 di *Transformations linéaires* dei proff. BURALI-FORTI e MARCOLONGO.

Se α è una dilatazione e la indichiamo con β la (1) diviene

$$\beta E(u_1 . u_2 \dots u_{n-1}) = I_1\beta \cdot E(u_1 . u_2 \dots u_{n-1}) - \dots - E(u_1 . u_2 , \dots \beta u_{n-1}); \tag{2}$$

se invece α è un'omografia assiale, indicandola con γ, la stessa formula acquista la forma

$$\gamma E(u_1 u_2 \dots u_{n-1}) = E(\gamma u_1 , u_2 \dots . u_{n-1}) + \dots + E(u_1 . u_2 \dots . \gamma u_{n-1}).$$

Veniamo ora allo studio delle direzioni unite di una dilatazione β nel caso che l'equazione secolare da cui dipendono abbia una radice doppia.

Siano dunque $x_1 . x_2 \dots x_{n-2}$ le radici semplici dell'equazione $I_n(\beta - x) = 0$ e $u_1 . u_2 \dots u_{n-2}$ le corrispondenti direzioni unite di β che, per cose note, sono ortogonali a due a due. Sia $\overline{x}$ la radice doppia della stessa equazione e u la direzione unita per β che gli corrisponde e che è ortogonale alle precedenti.

Per la (2) abbiamo

$$\begin{aligned}\beta E(u_1 . u_2 \dots u_{n-2} . u) &= I_1\beta \cdot E(u_1 u_2 \dots u_{n-2} u) - E(\beta u_1 , u_2 \dots u_{n-2} , u) - \\ &\quad - \dots - E(u_1 . u_2 \dots u_{n-2} . \beta u) \\ &= I_1\beta \cdot E(u_1 . u_2 \dots u_{n-2}) - x_1 E(u_1 , u_2 \dots u_{n-2} . u) - \\ &\quad - \dots - \overline{x} E(u_1 . u_2 \dots u_{n-2} . u) \\ &= (I_1\beta - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-2} - \overline{x}) \cdot E(u_1 , u_2 \dots u_{n-2} , u) \\ &= \overline{x} E(u_1 . u_2 \dots u_{n-2} . u)\end{aligned}$$

essendo nel nostro caso $I_1\beta = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + 2\overline{x}$.

Dunque possiamo concludere che il vettore $v = E(u_1, u_2 \dots u_{n-2}, u)$ è pure direzione unita per β. Ne segue immediatamente che ogni vettore w appartenente allo spazio S_2 determinato dai vettori u e v è pure direzione unita per la dilatazione β. Invero posto

$$w = mu + nv$$

si ha

$$\beta w = m\beta u + n\beta v = \bar{x}(mu + nv) = \bar{x}w.$$