Bollettino Unione Matematica Italiana

Enea Bortolotti

Sulle varietà subordinate negli spazi a connessione affine e su di una espressione dei simboli di Riemann

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 87–94.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Sulle varietà subordinate negli spazi a connessione affine e su di una espressione dei simboli di Riemann.

Nota di ENEA BORTOLOTTI (a Bologna).

1. In una nota recente, apparsa su questo « Bollettino » ([1]), il prof. TONOLO espone una dimostrazione elementare di una formula pei simboli di RIEMANN di prima specie di una V_m riemanniana in R_n euclideo, dovuta al prof. VITALI ([2]). La formula stessa, e anzi, una formula più generale, relativa alle V_m in V_n *a connessione metrica* qualunque, si può anche ricavare come conseguenza immediata di una formula già da me in altro luogo indicata ([3]), la quale compendia le equazioni di GAUSS e di CODAZZI per una V_m in V_n.

Indicherò tra breve queste formule: svolgerò prima alcune considerazioni di carattere più generale, che estendono alle va-

([1]) A. TONOLO, *Una espressione dei simboli di Riemann di prima specie per le varietà negli spazi euclidei.* (« Boll. Un. Matem. », VII, 1928, pp. 34-36).

([2]) G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano,* (« Atti Ist. Veneto », 1927-28, t. 87, parte II, pp. 349-428), p. 394, form. (17). La formula data dal prof. VITALI è relativa alle V_m in uno spazio H (hilbertiano); quella indicata dal prof. TONOLO ne è un caso particolare.

rietà subordinate negli spazi *a connessione affine* (A_m in A_n) i risultati che per le V_m in V_n riemanniane avevo indicato nella nota (cit. ([3])), sopra ricordata. Si tratta veramente di un argomento che ha già avuto ampie e complete trattazioni ad opera di WEYL, BERWALD, SCHOUTEN ([4]), HLAVATY ([5]), LAGRANGE, EISENHART,.... ; pure non mi sembra inutile dare qui rapido cenno d'un metodo che s'ispira al modello offerto dagli eleganti procedimenti dello SCHOUTEN, ma presenta, a differenza di ciascuna delle precedenti trattazioni, carattere di invarianza per ogni trasformazione di coordinate sia nella A_m subordinata che nella A_n ambiente, e realizza tra gli elementi di A_m e dell'ambiente una netta e precisa distinzione.

2. Siano dunque A_m, A_n $(m < n)$ due varietà a connessione affine: siano x^r $(r, s, t, u, v = 1, 2, \ldots, n)$, y^λ $(\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 1, 2, \ldots, m)$ coordinate curvilinee in A_n e in A_m, e Γ^r_{st}, $\gamma^\lambda_{\mu\nu}$ le rispettive componenti delle connessioni. Esprimiamo ora che A_m è immersa in A_n. Siano $x^r = x^r(y^\lambda)$ le equazioni parametriche di A_m in A_n, e $\theta^r_\lambda = \dfrac{\partial x^r}{\partial y^\lambda}$; se definiamo il 1° tensore di curvatura $\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}$ di A_m in A_n ponendo (come in l. c. ([3]))

$$\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r} = \nabla_\lambda \theta^r_\mu = \frac{\partial \theta^r_\mu}{\partial y^\lambda} + \Gamma^r_{st}\,\theta^s_\mu\,\theta^t_\lambda - \gamma^\nu_{\mu\lambda}\,\theta^r_\nu, \tag{1}$$

ove ∇_λ è, pei tensori dipendenti dalle due serie di variabili x^r, y^λ, simbolo di derivazione covariante secondo LAGRANGE ([6]), abbiamo subito, come condizioni di integrabilità delle (1), le equazioni

$$\nabla_\lambda \Omega_{\mu\tau}^{\cdot\cdot r} - \nabla_\mu \Omega_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot r} = \overset{a}{R}{}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r}\,\theta^s_\mu\,\theta^t_\lambda\,\theta^u_\tau - \overset{b}{R}{}_{\mu\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\,\theta^r_\nu + 2\overset{b}{S}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\,\Omega_{\nu\omega}^{\cdot\cdot r}. \tag{2}$$

ove $\overset{a}{R}{}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r}$, $\overset{b}{R}{}_{\mu\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $\overset{a}{S}{}_{st}^{\cdot\cdot r}$, $\overset{b}{S}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ sono i tensori di RIEMANN-CHRISTOFFEL e i tensori di torsione in A_n e in A_m. Nelle (2) non figurano le

([3]) Nella mia Nota: *Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi.* (« Boll. Un. Matem. », VI, 1927, pp. 134-137).

([4]) J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül.* (Berlin, Springer, 1924), pp. 133-165.

([5]) V. HLAVATY, *Contribution au calcul différentiel absolu.* (Vestníku Kral. Čes. Spolec. Nauk. Tr. II. Roc. 1926).

([6]) Loc. cit. ([3]), p. 135; R. LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu* (Paris, Gauthier-Villars, 1926), p. 10.

$\overset{a}{S}{}_{st}^{\cdot\cdot r}$ che però sono legate alle $\overset{b}{S}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ e alle $\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}$ dalle relazioni

$$(3) \qquad \overset{a}{S}{}_{st}^{\cdot\cdot r}\,\theta_{\mu}^{s}\,\theta_{\lambda}^{t} = \overset{b}{S}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}\,\theta_{\nu}^{r} + \frac{1}{2}\left(\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r} - \Omega_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot r}\right) \text{ (7)}.$$

Le (2), (3) sono le condizioni a cui sono soggette le $\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}$ per l'appartenenza della A_m alla A_n. Ma finora non abbiamo posto in relazione le *connessioni affini* in A_m e in A_n. Se vogliamo che la connessione affine in A_m sia *subordinata* a quella di A_n possiamo — è questa la via seguita da WEYL, BERWALD, SCHOUTEN, HLAVATY — assegnare, per ogni punto di A_m, una p-direzione (pseudonormale) ($p = n - m$ (8)) indipendente dall'm-giacitura tangente, e definire la derivazione covariante ∇_λ pei tensori di A_m mediante la condizione che, se v^λ, u^λ sono due qualunque vettori controvarianti di A_m (e $v^s = \theta_\lambda^s v^\lambda$, $u^s = \theta_\lambda^s u^\lambda$ gli stessi vettori considerati in A_n), $\nabla_\mu v^\lambda_{\cdot} u^\mu$ sia la proiezione di $\nabla_s v^r_{\cdot} u^s$ fatta, parallelamente alla p-direzione pseudonormale, sulla m-giacitura tangente alla A_m.

La p-direzione pseudonormale sia definita mediante p vettori controvarianti $\underset{j}{X}{}^r$ $(i, j, l = 1, 2, \ldots, p)$: definiamo $t_{(s)}^{(r)}$ (9) ponendo $t_{(\lambda)}^{(r)} = \theta_\lambda^r$, $t_{(m+j)}^{(r)} = \underset{j}{X}{}^r$: detto $T_{(r)}^{(s)}$ l'elemento reciproco di $t_{(s)}^{(r)}$ in $\left|t_{(s)}^{(r)}\right|$, poniamo $T_{(r)}^{(\lambda)} = \Theta_r^\lambda$, $T_{(r)}^{(m+j)} = \overset{j}{\xi}_r$. Queste ultime posizioni sono giustificate dal fatto che, anzitutto, le $\overset{j}{\xi}_r$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ sono p vettori covarianti, tangenti ad A_m, cioè, ciascuno dei quali contiene il p-vettore covariante tangente alla A_m; precisamente (cfr. SCHOUTEN, l. c. (4), p. 159) la $(n-1)$-giacitura di $\overset{j}{\xi}_r$ è quella che contiene l'm-giacitura tangente e le direzioni di $\underset{1}{X}{}_r$, $\underset{2}{X}{}_r, \ldots$, $\underset{j-1}{X}{}_r$, $\underset{j+1}{X}{}_r, \ldots$, $\underset{p}{X}{}_r$, e inoltre i vettori $\overset{j}{\xi}_r$ risultano normalizzati rispetto ai vettori $\underset{j}{X}{}^r$

(7) Cfr. HLAVATY, loc. cit. (5), form. (12), mentre le (2) corrispondono alle 23 *b*) di HLAVATY. Le (2) sono le (13) della mia nota cit. (3); in questa formula vanno corretti i segni degli ultimi due termini.

(8) In generale le 2-giaciture osculatrici alle curve di A_m uscenti da un punto P appartengono a un $E_{m+\nu}$ (spazio affine) con $\nu < p$: basterebbe assegnare, in P, come pseudonormale, una ν-direzione appartenente a tale $E_{m+\nu}$. Ved. la mia Nota: *Sistemi assiali e connessioni nelle* V_m. (Rend. Lincei, serie VI, vol. V, 1927, pp. 390-395).

(9) Metto entro parentesi, oppure verticalmente sopra o sotto la lettera cui si riferiscono, gli indici che *non sono* di covarianza o controvarianza.

dalle condizioni

$$(4)\qquad \overset{j}{\xi}_r \underset{j}{X}^r = \alpha_{(ij)} = \begin{cases} 1 \text{ per } i = j \\ 0 \text{ per } i \neq j \end{cases}$$

(SCHOUTEN, ibid.). I prodotti alternati

$$(5)\qquad X^{r_1 r_2 \dots r_p} = \underset{1}{X}^{[r_1} \dots \underset{p}{X}^{r_p]}, \quad \xi_{r_1 r_2 \dots r_p} = \overset{1}{\xi}_{[r_1} \dots \overset{p}{\xi}_{r_p]}$$

dànno un p-vettore controvariante e un p-vettore covariante orientati precisamente secondo la p-direzione pseudonormale e secondo la m-giacitura tangente: essi sono legati dalla condizione di normalizzazione

$$p!\, X^{r_1 r_2 \dots r_p} \xi_{r_1 r_2 \dots r_p} = 1$$

(la *Erste Normierungsbedingung* di SCHOUTEN: l. c., p. 157).

Poi: le Θ_r^λ sono le componenti di un tensore, come segue ad es. dal fatto che è

$$(7)\qquad \Theta_r^\lambda \theta_\lambda^s = a_r^s - \sum_1^p{}_j \underset{j}{X}^s \overset{j}{\xi}_r ;$$

precisamente, come (ovviamente) $w_\lambda = \theta_\lambda^s w_s$ è il componente secondo A_m (A_m-componente) di un vettore covariante w_s di A_n (applicato ad un punto di A_m), così è $v^\lambda = \Theta_r^\lambda v^r$ l'A_m-componente (proiezione fatta parallelamente a $X^{r_1 r_2 \dots r_p}$ su $\xi_{r_1 r_2 \dots r_p}$) del vettore controvariante v^r di A_n.

Se in particolare v^r, w_s appartengono ad A_m, si ha anche

$$(8)\qquad v^r = \theta_\lambda^r v^\lambda, \quad w_s = \Theta_s^\lambda w_\lambda .$$

Dalla prima di queste si ha derivando, tenendo presente la (1),

$$(9)\qquad \nabla_s v^r \theta_\mu^s = \Omega_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot r} v^\lambda + \theta_\lambda^r \nabla_\mu v^\lambda .$$

Introduciamo il 2° *tensore di curvatura* (secondo SCHOUTEN) di A_m in A_n ponendo

$$(10)\qquad H_{\lambda \cdot r}^{\cdot \mu} = \nabla_\lambda \Theta_r^\mu .$$

e avremo analogamente

$$(11)\qquad \nabla_s w_r \cdot \theta_\mu^s = H_{\mu \cdot r}^{\cdot \lambda} w_\lambda + \Theta_r^\lambda \nabla_\mu w_\lambda .$$

Ora: essendo

$$(12)\qquad \theta_\lambda^r \Theta_r^\mu = b_\lambda^\mu \left(= \begin{cases} 1 \text{ per } \mu = \lambda \text{ (non somm.)} \\ 0 \text{ per } \mu \neq \lambda \end{cases} \right)$$

si ha tra i due tensori di curvatura la relazione necessaria:

$$\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}\,\Theta_r^\mu + \theta_\lambda^r\,\Pi_{\nu\cdot r}^{\cdot\mu} = 0. \tag{13}$$

Ma non ci siamo valsi ancora della condizione di *subordinazione* della connessione in A_m a quella in A_n. Siccome dalla (9) si ha

$$\nabla_\mu v^\lambda = \Theta_r^\lambda\,\theta_\mu^s\,\nabla_s v^r - \Omega_{\mu\nu}^{\cdot\cdot r}\,\Theta_r^\lambda\,v^\lambda, \tag{14}$$

vediamo che è necessario e sufficiente, perchè sussista la subordinazione nel senso poco sopra precisato, che sia

$$\Omega_{\mu\nu}^{\cdot\cdot r}\,\Theta_r^\lambda = 0 \text{ (}^{10}\text{)}. \tag{15}$$

La (13) ci mostra che dovrà anche essere

$$\Pi_{\nu\cdot r}^{\cdot\mu}\,\theta_\lambda^r = 0. \tag{16}$$

Conseguenze differenziali di queste sono le

$$\nabla_\omega \Omega_{\mu\nu}^{\cdot\cdot r}\,\Theta_r^\lambda + \Omega_{\mu\nu}^{\cdot\cdot r}\,\Pi_{\omega\cdot r}^{\cdot\lambda} = 0, \tag{17}$$

$$\nabla_\omega \Pi_{\nu\cdot r}^{\cdot\mu}\,\theta_\lambda^r + \Pi_{\nu\cdot r}^{\cdot\mu}\,\Omega_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot r} = 0. \tag{18}$$

D'altra parte, come le (2) sono le condizioni d'integrabilità delle (1), così per le (10) troviamo le condizioni d'integrabilità seguenti:

$$\nabla_\nu \Pi_{\lambda\cdot\cdot r}^{\cdot\mu} - \nabla_\lambda \Pi_{\lambda\cdot\cdot r}^{\cdot\mu} = \overset{a}{R}{}_{str}^{\cdot\cdot\cdot u}\,\Theta_u^\mu\,\theta_\nu^s\,\theta_\lambda^t - \overset{b}{R}{}_{\nu\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot\mu}\,\Theta_r^\tau + 2\overset{b}{S}{}_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\tau}\,\Pi_{\tau\cdot r}^{\cdot\mu}. \tag{19}$$

3. Ora: le equazioni di Gauss e di Codazzi generalizzate per le A_m in A_n si hanno come conseguenze immediate delle (2), (19), tenendo presenti le (3), (17), (18).

Precisamente: dalle (2) moltiplicando per Θ_r^ω, oppure dalle (19) moltiplicando per θ_ω^r e sommando, si ha

$$\Omega_{\nu\mu}^{\cdot\cdot r}\,\Pi_{\lambda\cdot r}^{\cdot\omega} - \Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}\,\Pi_{\nu\cdot r}^{\cdot\omega} = \overset{b}{R}{}_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\omega} - \overset{a}{R}{}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r}\,\theta_\mu^u\,\theta_\nu^s\,\theta_\lambda^t\,\Theta_r^\omega \tag{20}$$

(equazioni di Gauss generalizzate, cfr. Schouten, l. c. ([4]), p. 160):

([10]) Che in effetto le (15) *determinino* la connessione affine in A_m si vede subito. Per le (1) esse dànno

$$\gamma_{\nu\mu}^\lambda = \Theta_r^\lambda\left(\frac{\partial\theta_\nu^r}{\partial u^\mu} + \Gamma_{st}^r\,\theta_\nu^s\,\theta_\mu^t\right).$$

introdotti i tensori

$$(21)\qquad \overset{i}{\omega}_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \overset{i}{\xi}_r \cdot \theta^r_\mu, \quad \underset{i}{\pi}_\lambda^{\cdot\mu} = \nabla_\lambda \underset{i}{X}^r \cdot \Theta^\mu_r$$

pei quali si avrà

$$(22)\qquad \Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r} = -\Sigma_i \overset{i}{\omega}_{\lambda\mu} \underset{i}{X}^r, \quad \Pi_{\lambda\cdot r}^{\cdot\mu} = -\Sigma_i \underset{i}{\pi}_{\lambda\cdot}^{\cdot\mu} \overset{i}{\xi}_r$$

e posto (SCHOUTEN, ibid.; HLAVATY, l. c. (5), p. 9)

$$(23)\qquad \underset{i}{\overset{j}{v}}_\lambda = -\theta^s_\lambda \nabla_s \underset{i}{X}^r \cdot \overset{j}{\xi}_r = \theta^s_\lambda \nabla_s \overset{j}{\xi}_r \cdot \underset{i}{X}^r .$$

si ha dalle (2) moltiplicando per $\overset{l}{\xi}_r$ e sommando:

$$(24)\qquad \nabla_\lambda \overset{l}{\omega}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \overset{l}{\omega}_{\lambda\mu} + \sum_j \left(\overset{j}{\omega}_{\lambda\mu} \underset{j}{\overset{l}{v}}_\nu - \overset{j}{\omega}_{\nu\mu} \underset{j}{\overset{l}{v}}_\lambda \right) = \overset{a}{R}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r} \theta^s_\lambda \theta^t_\nu \theta^u_\mu \overset{l}{\xi}_r - 2\overset{b}{S}_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\tau} \overset{l}{\omega}_{\tau\mu} .$$

e dalle (19), moltiplicando per $\underset{l}{X}^r$ e sommando,

$$(25)\qquad \nabla_\lambda \underset{l}{\pi}_\nu^{\cdot\mu} - \nabla_\nu \underset{l}{\pi}_\lambda^{\cdot\mu} + \sum_j \left(\underset{j}{\pi}_\nu^{\cdot\mu} \underset{j}{\overset{j}{v}}_\lambda - \underset{j}{\pi}_\lambda^{\cdot\mu} \underset{l}{\overset{j}{v}}_\nu \right) = \overset{a}{R}_{str}^{\cdot\cdot\cdot u} \theta^s_\nu \theta^t_\lambda \Theta^\mu_u \underset{l}{X}^r - 2\overset{b}{S}_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\tau} \underset{l}{\pi}_\tau^{\cdot\mu} :$$

le (24), (25) sono (cfr. SCHOUTEN, HLAVATY, l. c.) le equazioni di CODAZZI generalizzate per le A_m in A_n.

4. Veniamo al caso particolare in cui A_m, A_n siano due varietà V_m, V_n *a connessione metrica* secondo WEYL e CARTAN. Ciò significa che sono assegnati in V_n e in V_m, due tensori simmetrici a_{rs}, $b_{\lambda\mu}$ (determinati a meno di fattori moltiplicativi) come tensori fondamentali, e si ha

$$(26)\qquad \nabla_t a_{rs} = \overset{a}{\varphi}_t \cdot a_{rs}, \quad \nabla_\nu b_{\lambda\mu} = \overset{b}{\varphi}_\nu \cdot b_{\lambda\mu} .$$

Nelle attuali ipotesi è

$$(27)\qquad \Theta^\nu_r = b^{\nu\omega} a_{rs} \theta^s_\omega .$$

e di qui segue, per le (26), questa relazione tra i due tensori di curvatura:

$$(28)\qquad \Pi_{\lambda\cdot r}^{\cdot\nu} = b^{\nu\omega} a_{rs} \Omega_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot s} + \left(\overset{a}{\varphi}_t \theta^t_\lambda - \overset{b}{\varphi}_\lambda \right) b^{\nu\omega} a_{rs} \theta^s_\omega .$$

Se vogliamo che la metrica in V_m sia precisamente quella che viene subordinata dalla metrica in V_n, oltre alle (2), (3) debbono valere le relazioni

$$b_{\lambda\mu} = a_{rs}\,\theta^r_\lambda\,\theta^s_\mu, \qquad \overset{b}{\varphi}_\nu = \overset{a}{\varphi}_t\,\theta^t_\nu. \tag{29}$$

Dalla prima di queste derivando, e tenendo presenti le (26), si ha

$$a_{rs}\left(\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}\,\theta^s_\mu + \Omega_{\nu\mu}^{\cdot\cdot r}\,\theta^s_\lambda\right) = 0. \tag{30}$$

Da questa — che corrisponde alla (13), da cui può ricavarsi in forza delle (27), (28), (29) — se $\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}$ è simmetrico rispetto a ν, λ (il che accade certamente se V_m, V_n sono *senza torsione* [11]) e allora soltanto, segue anche

$$a_{rs}\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}\,\theta^s_\mu = 0, \tag{31}$$

cioè: gli $\frac{m(m+1)}{2}$ vettori $\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}$ $(\nu, \lambda = 1, 2, \ldots, m)$ sono ortogonali a V_m.

Questa d'altra parte, (corrispondente alle (15)), è la condizione perchè la *connessione metrica* in V_m sia quella che viene subordinata dalla connessione metrica in V_n, cioè, perchè $\nabla_\mu v^\lambda_\cdot u^\mu$ sia la proiezione ortogonale di $\nabla_r \overset{s}{v}_\cdot u^r$ sulla m-giacitura tangente a V_m $\left(v^r = \theta^r_\lambda v^\lambda,\ u^r = \theta^r_\lambda u^\lambda\right.$ essendo due qualunque vettori di $\left.V_m\right)$ [12].

Supponendo le (31) soddisfatte, e quindi anche le

$$\Omega_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot r} - \Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r} = 0, \tag{32}$$

si ha dalle (31) derivando

$$a_{rs}\,\theta^s_\mu\,\nabla_\tau\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r} + a_{rs}\,\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}\,\Omega_{\tau\mu}^{\cdot\cdot s} = 0. \tag{33}$$

Le (2), (3), (30) (o al luogo di quest'ultime, le (31), (32)) esprimono l'appartenenza di V_m a V_n e la subordinazione della sua connessione metrica a quella di V_n.

[11] Più in generale l'annullarsi della *parte emisimmetrica* di $\Omega_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot r}$ esprime che il *vettore di torsione* di una faccetta piana di V_m in P è il V_m-componente del vettore di torsione della faccetta medesima, considerata nella V_n ambiente.

[12] Per le varietà senza torsione, la subordinazione della *metrica* di V_m a quella di V_n porta sempre come conseguenza che anche la *connessione metrica* di V_m è subordinata a quella di V_n; questo è conseguenza di un noto teorema di Weyl (la connessione metrica, se è senza torsione, è *determinata* dai tensori a_{rs}, $\overset{a}{\varphi}_t$).

5. Verrò infine a mostrare come dalle (2), per una V_m a tensore di curvatura $\Omega_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot r}$ simmetrico, tenendo presenti le (3), (31), (33) seguano delle semplici espressioni per le $\overset{b}{R}_{\mu\lambda\omega\nu}$, che contengono in particolare la formula indicata nella nota (cit. ([1])) del prof. TONOLO.

Fissata la scelta del fattore di normalizzazione delle a_{rs}, e quindi anche delle $b_{\lambda\mu}$, abbiamo dalle (2), moltiplicando per $a_{rv}\theta_\omega^v$ e sommando

$$a_{rv}\theta_\omega^v\left(\nabla_\lambda\Omega_{\mu\nu}^{\cdot\cdot r}-\nabla_\mu\Omega_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot r}\right)=\overset{a}{R}_{stuv}\,\theta_\mu^s\,\theta_\lambda^t\,\theta_\nu^u\,\theta_\omega^v-\overset{b}{R}_{\mu\lambda\nu\omega}.$$

Per le (33) queste possono scriversi:

$$\overset{b}{R}_{\mu\lambda\nu\omega}=a_{rv}\left(\Omega_{\mu\nu}^{\cdot\cdot r}\Omega_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot v}-\Omega_{\mu\omega}^{\cdot\cdot v}\Omega_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot r}\right)+\overset{a}{R}_{stuv}\,\theta_\mu^s\,\theta_\lambda^t\,\theta_\nu^u\,\theta_\omega^v \tag{34}$$

cioè per le (1), se scriviamo x_ω^r, $x_{\omega\mu}^r$ per θ_ω^r, $\nabla_\mu\theta_\omega^r$,

$$\overset{b}{R}_{\mu\lambda\nu\omega}=a_{rv}\begin{vmatrix} x_{\mu\nu}^r & x_{\lambda\nu}^r \\ x_{\mu\omega}^v & x_{\lambda\omega}^v \end{vmatrix}+\overset{a}{R}_{stuv}\,x_\mu^s\,x_\lambda^t\,x_\nu^u\,x_\omega^v. \tag{35}$$

Queste sono le espressioni cui accennavo. Se in particolare (le (32) sono soddisfatte) e i tensori $\overset{a}{R}_{stuv}$, $\overset{a}{S}_{st}^{\cdot\cdot r}$, $\overset{a}{\varphi}$ sono nulli, cioè la V_n è un R_n euclideo, $\overset{b}{R}_{\mu\lambda\nu\omega}$ si riduce al simbolo di prima specie $(\nu\omega, \mu\lambda)$ di RIEMANN, e si ha quindi, essendo per le (32) $x_{\mu\nu}^r = x_{\nu\mu}^r$,

$$(\nu\omega,\mu\lambda)=a_{rv}\begin{vmatrix} x_{\nu\mu}^r & x_{\nu\lambda}^r \\ x_{\omega\mu}^v & x_{\omega\lambda}^v \end{vmatrix}. \tag{36}$$

formula che, se le linee coordinate in R_n sono cartesiane ortogonali, si riduce appunto a quella data dal prof. VITALI, nella forma che il prof. TONOLO ha indicato ([13]).

Bologna, marzo 1928.

([13]) Pel caso $m=2$ la formula era già stata data da E. E. LEVI, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio*. [« Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa », vol. X, 1905], p. 22, form. (9). Se poi $m=2$, $n=3$ (V_2 in R_3) la (36) si riduce a una formula notissima, anche recentemente ricordata su questo « Bollettino » (l'ultima formula della Nota *Sulla trasformazione assoluta....* di R. TAUCER: VII, 1928, pagine 14-18). Debbo queste indicazioni alla cortesia del prof. VITALI.