Bollettino Unione Matematica Italiana

Pietro Burgatti

Una dimostrazione della formula di Stokes

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 69–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_69_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1928.

Una dimostrazione della formula di Stokes.

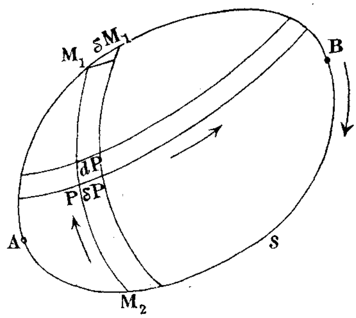
Nota di P. BURGATTI (a Bologna).

Una dimostrazione semplice e diretta della *formula di Stokes* si può ottenere partendo dalla formula di definizione di rot $\boldsymbol{u}$:

(0) $\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times dP \wedge \delta P = d\boldsymbol{u} \times \delta P - \delta \boldsymbol{u} \times dP = d(\boldsymbol{u} \times \delta P) - \delta(\boldsymbol{u} \times dP)$;

ove dP e δP (vettori) sono due spostamenti arbitrari del generico punto P, e $d\boldsymbol{u}$ e $\delta\boldsymbol{u}$ gl'incrementi del vettore $\boldsymbol{u}(P)$ quando si passa da P rispettivamente ai punti $P+dP$ e $P+\delta P$ (1).

Nel campo ove è definito $\boldsymbol{u}$ e $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ abbiasi una linea chiusa (s) che limita una porzione (σ) di superficie regolare. In ogni punto P di questa gli spostamenti dP e δP siano tangenti a una doppia



famiglia di linee opportunamente tracciate sulla superficie stessa nel senso delle freccie (vedi figura). Sarà $dP \wedge \delta P = \boldsymbol{n} d\sigma$, essendo $\boldsymbol{n}$ la normale unitaria in P a σ; onde si avrà

$$\int_\sigma \operatorname{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_\sigma d(\boldsymbol{u} \times \delta P) - \int_\sigma \delta(\boldsymbol{u} \times dP). \tag{1}$$

Per calcolare il primo integrale del secondo membro bisogna prima integrare lungo la striscia M_2M_1 alla quale si riferiscono gli spostamenti dP; si ottiene

$$\int_\sigma d(\boldsymbol{u} \times \delta P) = \int_A^B (\boldsymbol{u} \times \delta P)_1 - \int_A^B (\boldsymbol{u} \times \delta P)_2,$$

ove gl'indici (1) e (2) indicano i valori di quel prodotto nei punti M_1 e M_2. Ma si ha manifestamente (v. figura)

$$dM_1 = (\delta P)_1 + (dP)_2 \qquad \text{(in } M_1\text{)},$$
$$dM_2 = (\delta P)_2 + (dP)_2 \qquad \text{(in } M_2\text{)},$$

per conseguenza

$$\begin{aligned} \int_\sigma d(\boldsymbol{u} \times \delta P) &= \int_A^B (\boldsymbol{u} \times dM)_1 - \int_A^B (\boldsymbol{u} \times dM)_2 - \int_A^B (\boldsymbol{u} \times dP)_1 + \int_A^B (\boldsymbol{u} \times dP)_2 \\ &= \int_s \boldsymbol{u} \times dM - \int_A^B (\boldsymbol{u} \times dP)_1 + \int_A^B (\boldsymbol{u} \times dP)_2. \end{aligned} \tag{2}$$

(1) *Analyse vect. générale* di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, vol. I, p. 73. V. anche le mie *Lezioni di Meccanica razionale*, p. 398.

Ora essendo anche, analogamente a quanto s'è detto di sopra,

$$(2') \qquad \int_\sigma \delta(u \times dP) = \int_B^A (u \times dP)_1 - \int_B^A (u \times dP)_2 :$$

sostituendo in (1) si ottiene infine

$$\int_\sigma \operatorname{rot} u \times n d\sigma = \int_s u \times dM$$

che è appunto la *formula di Stokes.*

Importa notare che questa dimostrazione porta subito a riconoscere la verità della proposizione inversa: e cioè, se per ogni (σ) limitata dal dato contorno (s) si ha

$$\int_\sigma v \times n d\sigma = \int_s u \times dM,$$

il vettore $v(P)$ è necessariamente uguale a $\operatorname{rot} u$. Invero, dalla (2) e (2') segue che deve essere

$$\int_\sigma v \times n d\sigma = \int_s u \times dM = \int_\sigma d(u \times \delta P) - \int_\sigma \delta(u \times dP),$$

per ogni (σ), e perciò

$$v \times n d\sigma = v \times dP \times \delta P = d(u \times \delta P) - \delta(u \times dP):$$

che confrontata con la (0) dà $v = \operatorname{rot} u$.

In uno spazio euclideo a un numero di dimensioni $n > 3$ non sussiste più la (0), perchè manca l'operatore rot. Ma sussiste l'identità

$$\frac{du}{dP} dP \times \delta P - \mathrm{K} \frac{du}{dP} dP \times \delta P = d(u \times \delta P) - \delta(u \times dP),$$

sulla quale si può ripetere il ragionamento precedente [1].

Si ottiene così senz'altro la formula di Stokes estesa agli spazi S_n con $n > 3$:

$$\int_\sigma \left(\frac{du}{dP} dP \times \delta P - \mathrm{K} \frac{du}{dP} dP \times \delta P \right) = \int_s u \times dM.$$

[1] Nello spazio ordinario $(n = 3)$ è appunto

$$\frac{du}{dP} dP \times \delta P - \mathrm{K} \frac{du}{dP} dP \times \delta P = \operatorname{rot} u \times dP \wedge \delta P$$

ove $\mathrm{K} \frac{du}{dP}$ è l'omografia coniugata di $\frac{du}{dP}$.

o meglio

$$\int_\sigma \left(\frac{du}{dP} - \mathrm{K}\,\frac{du}{dP}\right) dP \times \delta P = \int_s u \times dM.$$

L'omografia vettoriale $\dfrac{du}{dP} - \mathrm{K}\,\dfrac{du}{dP}$ è *una omografia assiale*, ossia è uguale alla sua coniugata cambiata di segno.

E anche qui, se per una omografia γ risulta, qualunque sia (σ) limitata da (s), la relazione

$$\int_\sigma \gamma dP \times \delta P = \int_s u \times dM.$$

sarà necessariamente

$$\gamma = \frac{du}{dP} - \mathrm{K}\,\frac{du}{dP}.$$