Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Pietro Burgatti

Sulle equazioni algebriche a matrice

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 65–69.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

PICCOLE NOTE

Sulle equazioni algebriche a matrice.

Nota di P. BURGATTI (a Bologna).

1. Propongo di chiamare *equazioni a matrice* le equazioni algebriche della forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \dots & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} - x \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0;$$

dicitura che si presta meglio per indicare una classificazione. Così ci saranno le equazioni a matrice ortogonale, a matrice simmetrica (equazione secolare), a matrice gobba, emisimmetrica, ecc.

L'origine di questa Nota è venuta dalla lettura di quelle di COLUCCI e di VITALI [1]. Qui completo ed estendo i risultati di questi Autori: adoperando il calcolo vettoriale, per mostrare come ben si presti anche in queste questioni [2].

Sia α una omografia propria qualunque. Consideriamo l'equazione in x

(1) $$I_n(\alpha + x) = 0.$$

[1] COLUCCI, *Sopra un teorema di Brioschi*. « Boll. U. M. I », anno VI, n. 5. VITALI, *Sulle sostituzioni lineari ortogonali*. « Boll. U. M. I. », anno VII, n. 1.

[2] Ricorderò che la matrice $[a_{rs}]$ rappresenta una omografia vettoriale α; il determinante $|a_{rs}|$ è $I_n\alpha$ (l'invariante ennesimo di α). Si ha $I_n(\alpha\beta) = I_n\alpha \cdot I_n\beta$. L'equazione a matrice è rappresentata da $I_n(\alpha + x) = 0$. L'omografia $K\alpha$ è la coniugata di α ($\alpha \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times K\alpha \boldsymbol{v}$): è rappresentata dalla matrice $[a_{rs}]$ scambiate le linee con le colonne. La dilatazione di α si indica con $D\alpha$: è uguale a $\frac{1}{2}(\alpha + K\alpha)$. Se $I_n\alpha \neq 0$ l'omografia è detta *propria*, se $I_n\alpha = 0$ è detta *degenere*. Per una omografia degenere esiste sempre almeno un vettore $\boldsymbol{u}$ il cui trasformato è nullo ($\alpha\boldsymbol{u} = 0$). L'inversa di α si indica con α^{-1} ($\alpha\alpha^{-1} = 1$). Esiste α^{-1} quando l'omografia è propria.

L'equazione che ha per radici le reciproche di queste è

(2) $$I_n(\alpha^{-1} + y) = 0.$$

Infatti, si ha

$$I_n\left(\alpha^{-1} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} I_n(\alpha^{-1}x + 1)$$

e quindi

$$\frac{1}{x^n} I_n\alpha \cdot I_n(\alpha^{-1}x + 1) = \frac{1}{x^n} I_n(\alpha + x) = 0.$$

La (1) è anche equivalente a

(1') $$I_n(K\alpha + x) = 0.$$

Ne consegue: *le sole equazioni del tipo* (1) *a radici reciproche sono quelle che verificano una delle due condizioni* $\alpha = \alpha^{-1}$, $K\alpha = \alpha^{-1}$ (ossia $\alpha^2 = 1$, $K\alpha\alpha = 1$).

Le omografie soddisfacenti alla seconda condizione sono le *isomerie*. Per esse si ha $\alpha u \times \alpha v = u \times v$ qualunque siano i vettori u e v. Consideriamo questo caso.

Allora se a è radice reale di (1), l'omografia $\alpha + a$ è degenere, talchè esisterà un vettore unitario u, tale che

$$(\alpha + a)\, u = 0, \quad \text{ossia} \quad \alpha u = -au.$$

Ne consegue

$$\alpha u \times \alpha u = a^2 u^2.$$

Ma essendo α isomeria, il primo membro è uguale a u^2; dunque $a = \pm 1$, come appunto aveva affermato il BRIOSCHI.

Ora notiamo col COLUCCI che se x è radice qualunque di (1), si ha

$$I_n(K\alpha + x) \cdot I_n(\alpha + x) = I_n[1 + (\alpha + K\alpha)x + x^2] = 0$$

ossia

$$x^3 \cdot I_n(2D\alpha + y) = 0, \quad \left(y = x + \frac{1}{x}\right).$$

Ma essendo $D\alpha$ dilatazione, questa equazione, per cose note, ha tutte le radici reali. Allora sia $x = a + ib$ una radice complessa di (1); la

$$y = a + ib + \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

dev'essere reale; il che richiede che sia $a^2 + b^2 = 1$. Dunque quando α *è isomeria tutte le radici di* (1) *hanno modulo unitario* [1].

[1] COLUCCI, loc. cit.

Supponiamo ora che α soddisfi alla prima condizione $\alpha^2 = 1$. Allora si ha

$$I_n(\alpha - x) I_n(\alpha + x) = (1 - x^2) = (1 - x^2)^n = 0 :$$

la quale dimostra che tutte le radici sono uguali a ± 1.

2. Torniamo al caso generale. Se x è radice reale di (1), esiste come si sa, una direzione w tale che

$$\alpha w = x w,$$

detta *direzione unita* [1]. Supponiamo invece che x sia radice complessa, uguale ad $a + ib$. *Allora esistono due vettori unitari* **u** *e* **v** *tali che si ha*

$$\alpha u = a u - b v$$

$$\alpha v = a v + b u.$$

Infatti risulta

$$I_n(\alpha + a - ib) I_n(\alpha - a + ib) = I_n[(\alpha - a)^2 + b^2] = 0,$$

la quale esprime che l'omografia $(\alpha - a)^2 + b^2$ è degenere.

Si avrà dunque per cose già dette

$$(\alpha - a)^2 u + b^2 u = 0 \qquad (u^2 = 1).$$

Poniamo

$$(\alpha - a) u = - b v :$$

si ottiene

$$(\alpha - a) v = + b u.$$

e v soddisfa alla stessa equazione di u. Si ha dunque

$$\alpha u = a u - b v$$

$$\alpha v = a v + b u.$$

Di qui poi si trae

$$\alpha u \times \alpha v = (a^2 - b^2) u \times v + ab(u^2 - v^2).$$

Affinchè il secondo membro sia simmetrico rispetto a u e v come il primo, si richiede che risulti $v^2 = u^2 = 1$.

L'asserto dunque è dimostrato, e si ha in generale

$$\alpha u \times \alpha v = (a^2 - b^2) u \times v.$$

In massima u e v non saranno perpendicolari. Ma se α è isomeria, il primo membro è uguale a $u \times v$, epperò risulta $u \times v = 0$. In questo caso dunque *i due vettori sono certamente perpendicolari.*

[1] È più comodo ora cambiare x in $-x$.

Siano $2m$ e s rispettivamente il numero delle radici complesse e delle radici reali $(2m + s = n)$ [1]. Per le cose dette esisteranno in generale i vettori unitari w_1 ,,, w_s, $u_1 v_1 \dots u_2 v_2$ soddisfacenti alle relazioni

$$
\text{(I)} \qquad
\begin{aligned}
\alpha w_i &= x_i w_i & \qquad (i = 1, 2 \dots s)\\
\alpha u_i &= a_i u_i - b_i v_i & \\
\alpha v_i &= a_i v_i + b_i u_i & \qquad (i = 1, 2 \dots m)
\end{aligned}
$$

ove x_i è una radice reale, $a_i + ib_i$ una complessa.

Queste dimostrano che riferendo i punti di S_n a n assi paralleli a cotesti vettori (in massima assi obliqui), l'omografia α risulterà rappresentata dalla matrice

$$
\begin{bmatrix}
x_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
0 & x_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & x_s & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_1 & -b_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_1 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_2 & -b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_r & -b_r\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_r & a_r
\end{bmatrix}
$$

Nel caso particolare che α sia una *isomeria*, si ha $u_i \times v_i = 0$ e $a_i^2 + b_i^2 = 1$ come sì è detto, epperò ogni matrice

$$
\begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}
$$

rappresenta una isomeria in un S_2, o anche una rotazione nel senso di VITALI; cosicchè ne risulta il teorema enunciato da questo Autore [2].

3. Supponiamo ora che α sia una *omografia assiale*. È caratterizzata dalla proprietà $\alpha = -K\alpha$ (e quindi $\alpha u \times u = 0$ qualunque

(1) Si suppongono distinte.

(2) Loc. cit.

sia u). Indichiamola con γ. *L'equazione*

$$I_n(\gamma - x) = 0$$

ha tutte le radici immaginarie pure, salvo la radice x = 0, *se* n *è dispari*. Quest' ultima affermazione è evidente, giacchè $I_n\gamma$ è un determinante gobbo dispari per n dispari.

Infatti l' equazione

$$I_n(K\gamma - x) I_n(\gamma - x) = I_n(\gamma^2 - x^2) = 0$$

ha tutte le radici x^2 reali e negative: reali perchè γ^2 è una dilatazione ($K\gamma^2 = K\gamma \cdot K\gamma = \gamma^2$); negativa perchè la forma quadratica

$$\gamma^2(P-0) \times (P-0) = -\gamma(P-0) \times \gamma(P-0) = -\operatorname{mod} \gamma(P-0)^2$$

è essenzialmente negativa. Ne segue che le radici x dell' equazione proposta sono immaginarie pure.

In questo caso le (I) diventano (supponiamo n pari)

$$\gamma \boldsymbol{u}_i = -b_i \boldsymbol{v}_i, \quad \gamma \boldsymbol{v}_i = b_i \boldsymbol{u}_i \qquad (i = 1, 2 \ldots r, n = 2r)$$

ed è $\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_i = 0$, perchè $\gamma \boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{u}_i = 0$. Si possono dunque scegliere degli assi in guisa che l' omografia assiale sia rappresentata dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -b_1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ b_1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & -0 & 0 & -b_2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & b_2 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Dopo quanto si è detto è anche assai facile studiare il caso che α sia emissimmetrica, ossia della forma $1 + \gamma$, essendo γ assiale. Qui non ne diremo altro.