Bollettino Unione Matematica Italiana

Bonaparte Colombo

Coincidenza delle tangenti di Clebsch colle tangenti di Darboux e Segre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 100–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_100_0>

Coincidenza delle tangenti di Clebsch colle tangenti di Darboux e Segre.

Nota di BONAPARTE COLOMBO (a Torino).

1. H. JUNG, in un suo recente trattato (¹), prende in considerazione un teorema di A. CLEBSCH (²), del 1864, ed in proposito chiama *prima terna di tangenti di Clebsch* in un punto qualunque O di una superficie algebrica S le rette che da O proiettano i tre flessi della cubica piana, avente in O un punto doppio, sezione del piano ω tangente in O ad S colla superficie del terzo ordine polare di O rispetto ad S, e chiama *seconda terna di tangenti di Clebsch* quella duale, costituita dalle tangenti coniugate.

G. DARBOUX (³), nel 1880, mette in evidenza in ogni punto O di una superficie S, più generalmente analitica, tre tangenti notevoli, che sono le rette triple dell'involuzione ∞^2 di terzo grado costituita dalle terne di tangenti nel punto triplo O alle curve intersezioni di S colle quadriche osculatrici in O.

C. SEGRE (⁴), nel 1908, ritrova le stesse tre tangenti per tutt' altra via, trattando una corrispondenza tra la stella di piani di centro O ed il piano punteggiato di sostegno ω, e, per dualità, segnala come notevoli anche le tre tangenti coniugate.

Le prime si chiamano di solito *tangenti di Darboux* e le seconde

(¹) *Algebraiche Flächen.* Hannover, 1925, p. 122. (« Die Clebschschen Tangenten »).

(²) *Zur Theorie der algebraichen Flächen.* « Journal für Mathematik », 63 (1864), p. 14.

(³) *Sur le contact des courbes et des surfaces.* « Bulletin des sciences mathématiques », (2) 4, (1880), p. 348.

(⁴) *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie.* « Rend. Acc. dei Lincei », (5) 17, (2° semestre 1908), p. 405.

tangenti di Segre [1]; tale denominazione si trova pure nell' articolo di L. BERWALD [2].

Scopo di questa mia Nota è di stabilire che le tangenti di CLEBSCH della prima terna coincidono colle tangenti di DARBOUX, ed in conseguenza le tangenti di CLEBSCH della seconda terna colle tangenti di SEGRE. Credo che l' osservazione sia nuova e degna di rilievo.

2. L' equazione in coordinate ad es. cartesiane ortogonali x, y, z della superficie algebrica S, di ordine $n \geq 3$, passante per l'origine O ed avente in esso come piano tangente il piano $z = 0$, abbia il primo membro ordinato secondo termini di grado crescente: precisamente sia:

$$z + (\varphi_0 z^2 + \varphi_1 z + \varphi_2) + (zQ + \varphi_3) + \dots = 0, \tag{1}$$

ove le φ_i sono forme di grado i in x, y, Q è una forma di secondo grado in x, y, z, e non sono segnati i termini di grado maggiore di tre.

La superficie del terzo ordine polare di O rispetto ad S viene segata dal piano $z = 0$ secondo la cubica C di equazione

$$\varphi_3 + (n - 2)\varphi_2 = 0, \tag{2}$$

come è facile calcolare.

Le tre rette che da O proiettano i tre flessi di C, costituenti adunque la prima terna di tangenti di CLEBSCH, sono rappresentate dall' equazione

$$\varphi_3 + (ax + by)\varphi_2 = 0 \quad [3], \tag{3}$$

ove le a, b sono costanti determinate in modo unico in guisa che la forma a primo membro sia *apolare* alla φ_2 [4].

[1] Esse sono suscettibili di una ulteriore definizione geometrica molto semplice ed interessante, dovuta ad A. TERRACINI: *Sul significato geometrico della normale proiettiva*. « Rend. Acc. dei Lincei », (6) 3, (1° semestre 1926), p. 584.

[2] « Encyklopädie der Math. Wiss. », III, 3, (7). « *Differentialinvarianten in der Geometrie....* », p. 108. (« Die Methode von Wilczynski.... »).

[3] Cfr. in proposito G. FUBINI-E. CECH: *Geometria proiettiva differenziale*, tomo 1°, p. 16. Ringrazio appunto il prof. FUBINI di avermi indicata la via, con cui evitare calcoli inutili.

[4] Si osservi che la (3) non dipende dal coefficiente $n-2$ che figura nella (2).

In prossimità di 0 la z dei punti di S, essendo una funzione algebrica di x, y, ammette uno sviluppo in serie:

$$-z = \psi_2 + \psi_3 + \dots, \tag{4}$$

ove la ψ_i sono forme di grado i in x, y.

Sostituendo la (4) nella (1) e osservando che la (1) diventa allora un' identità, si trae

$$\begin{cases} \psi_2 = \varphi_2 \\ \psi_3 = \varphi_3 - \varphi_1\psi_2 . \end{cases} \tag{5}$$

Le tre tangenti di DARBOUX sono rappresentate dall'equazione

$$\psi_3 + (hx + ky)\,\psi_2 = 0 \quad (^1), \tag{6}$$

ove le h, k sono costanti determinate in modo unico in guisa che la forma a primo membro sia *apolare* alla ψ_2.

Ora le terne di rette rappresentate dalla (3) e dalla (6) sono le stesse; infatti i primi membri di queste equazioni sono identicamente eguali, perchè, in grazia delle (5), ψ_2 è eguale a φ_2 e ψ_3 differisce da φ_3 di una forma divisibile per φ_2.

(1) Cfr. G. FUBINI-E. CECH, loc. cit., p. 62.