Filippo Sibirani

Sul calcolo del valor attuale di rendite certe a termini variabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.1, p. 8–10.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_8_0>

Sul calcolo del valor attuale di rendite certe a termini variabili.

Nota di FILIPPO SIBIRANI (a Trieste).

1. Il prof. G. USAI ha recentemente data (¹) l'espressione del valore attuale di una rendita certa immediata della durata di n anni i cui termini sono $1, 2^r, 3^r, \ldots n^r$ mediante una combinazione lineare dei valori

$$a_{\overline{n}|}, \quad v\frac{d}{dv}a_{\overline{n}|}, \quad v^2\frac{d^2}{dv^2}a_{\overline{n}|}, \ldots \quad v^r\frac{d^r}{dv^r}a_{\overline{n}|}$$

ove

$$a_{\overline{n}|} = v\frac{1-v^n}{1-v}$$

è il valore attuale di una rendita certa immediata della durata di n anni, di termine 1, e v è il fattore di sconto, cioè $v = (1+i)^{-1}$, se i è il tasso.

L'espressione trovata esige tuttavia calcoli abbastanza lunghi: alla rapidità del calcolo corrisponde meglio l'uso di una formula da me stabilita nella Nota: *Sul calcolo di certe somme* (²), formula che permette il calcolo del valor attuale di una rendita immediata i cui termini sono i valori che per $x = 1, 2, \ldots n$ prende una funzione razionale intera di x. È chiaro che un caso particolare è quello considerato da G. USAI.

2. Io ho dimostrato che se $\varphi(p+1)$ è una funzione razionale intera di grado r in $p+1$, è

$$\sum_{p=0}^{n-1}\varphi(p+1)t^p = t^n\sum_{k=0}^{r}\Delta^k\varphi(1)n\binom{n-1}{k}\frac{\displaystyle\sum_{h=0}^{k}(-1)^h\binom{k}{h}\frac{t^{n-h}}{n-h}}{(t-1)^{k+1}} +$$

$$+\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\Delta^k\varphi(1)\frac{t^k}{(t-1)^{k+1}}.$$

ove con $\Delta^k\varphi(1)$ si intende la differenza d'ordine k di $\varphi(1)$.

(¹) *Sul valore attuale di una rendita postecipata e temporanea.* « Giornale di Matematica finanziaria », Torino, 1927, vol. IX.

(²) Il « Bollettino di Matematica », Firenze, 1928, annata XXIV.

Il valore attuale della rendita immediata di termini $f(1)$, $f(2)$,... $f(n)$, ove $f(x)$ è una funzione razionale intera di x di grado r, è

$$\sum_{p=1}^{n} f(p) v^p.$$

Se usiamo della formula precedente, dopo aver osservato che

$$\frac{v}{v-1} = -\frac{1}{i},$$

abbiamo

$$\sum_{p=1}^{n} f(p) v^p = v^n \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} \Delta^k \varphi(1) n \binom{n-1}{k} \frac{\sum_{h=0}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} \frac{(1+i)^h}{n-h}}{i^{k+1}} + \sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k f(1)}{i^{k+1}}.$$

Ora è

$$n \binom{n-1}{k} \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} \frac{(1+i)^h}{n-h} = n \binom{n-1}{k} \sum_{s=0}^{k} i^s \left| \sum_{h=s}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} \binom{h}{s} \frac{1}{n-h} \right| =$$

$$= (-1)^k \sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s} i^s$$

onde sostituendo si ha in definitiva

$$\sum_{p=1}^{n} f(p) v^p = \sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k f(1) - v^n \sum_{s=0}^{r-k} \binom{n}{s} \Delta^{s+k} f(1)}{i^{k+1}}. \tag{1}$$

Mandando n all'infinito si ha il valore attuale di una perpetuità immediata i cui termini sono $f(1)$, $f(2)$,.... Poichè la somma che moltiplica v^n è una funzione razionale intera di n,

$$\lim_{n \to \infty} v^n \sum_{s=0}^{r-k} \binom{n}{s} \Delta^{s+k} f(1) = 0$$

e il valore attuale della perpetuità è

$$\sum_{p=1}^{\infty} f(p) v^p = \sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k f(1)}{i^{k+1}}.$$

3. Osserviamo che dalla (1) ponendo

$$f(p) = c + d(p-1)$$

si ha il valore attuale di una rendita immediata i cui termini formano una progressione aritmetica di primo termine c e ragione d.

Se

$$f(p) = p^r$$

si ha il caso considerato dal prof. USAI. La (1) dà

$$\sum_{p=1}^{n} p^r v^p = \sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k 1^r - v^n \sum_{s=0}^{r-k} \binom{n}{s} \Delta^{s+k} 1^r}{i^{k+1}}.$$

Come esempio numerico

$$\sum_{p=1}^{n} p^3 v^p = \frac{1 - v^n \left\{1 + 7n + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}\right\}}{i} +$$

$$+ \frac{7 - v^n \left\{7 + 12n + 6\binom{n}{2}\right\}}{i^2} + \frac{12 - v^n \{12 + 6n\}}{i^3} + \frac{6 - 6v^n}{i^4}.$$