
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * P. Montel: Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications.
- * G. Fubini – E. Cech: Geometria proiettiva differenziale. Tomo II,
- * C. E. Weatherburn: Differential Geometry of three dimensions
- * G. Julia: Éléments de géométrie infinitésimale
- * H. L. Rietz: Mathematical Statistics
- * J. A. Schouten: Der Ricci-Kalkül
- * C. Runge und H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen
- * L. Bieberbach: Differentialgleichungen
- * R. Courant: Vorlesungen über Differential und Integralrechnung.
Band I: Funktionen einer Veränderlichen

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.1, p. 48–61.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_48_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_48_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_48_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

P. MONTEL: *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*. Paris, Gauthier-Villars. 1927, pagg. VI-306.

Questa opera si può annoverare fra le più interessanti della raccolta di monografie sulla teoria delle funzioni, pubblicata sotto la direzione di E. BOREL. In essa, l'Autore si è proposto di mostrare l'importanza della nozione di famiglie normali di funzioni analitiche, da lui introdotta già da vari anni nell'Analisi, sviluppandone la teoria e le applicazioni; e non v'è chi, dopo la lettura del libro, non debba rimanere persuaso che questa nozione offre un reale interesse, sia come concetto teorico, sia come mezzo efficace di dimostrazione e di indagine. Non è però soltanto nello sviluppo della teoria delle famiglie normali di funzioni che risiede l'interesse dell'opera; dacchè, sotto l'aspetto di applicazioni, vi si portano a cognizione del lettore molti dei risultati più interessanti ottenuti da varie parti nella odierna teoria delle funzioni analitiche, e di ciò persuade un rapido sguardo sul contenuto dei dieci Capitoli che compongono questo corso di lezioni.

Nel primo Capitolo, si richiamano le definizioni ed i principi della teoria degli aggregati, particolarmente di quelli di punti del piano luogo della variabile complessa. Venendo poi alle famiglie di funzioni, mostra come la limitazione delle funzioni nel loro insieme porti alla uguale continuità, quale è stata definita dall'ASCOLI, e ne deduce il teorema fondamentale per la presente teoria, e che risale all'ARZELÀ, che cioè da ogni successione presa nella famiglia si può estrarre una nuova successione convergente uniformemente ad una funzione limite. Le ovvie conseguenze di questo teorema per le famiglie di funzioni analitiche regolari portano alla definizione del concetto di famiglie normali e ad alcune sue prime conseguenze. Nel secondo Capitolo, premesse note proposizioni relative alla continuazione analitica, viene definita una funzione automorfa che compirà l'ufficio della funzione modulare onde ottenere la dimostrazione del teorema fondamentale sulle

famiglie normali: che cioè è normale ogni famiglia di funzioni analitiche regolari entro un campo dove non assumono due valori speciali. Seguono generalizzazioni del teorema, la definizione delle famiglie quasi normali, che sono quelle in cui la normalità può mancare in un numero finito di punti, ed i criteri per la loro determinazione. Con un metodo uniforme, il Capitolo III usa le nozioni precedenti a stabilire i celebri teoremi di PICARD, il notevole complemento arrecato a questi dal JULIA, ed il non meno famoso teorema di LANDAU. La teoria della rappresentazione conforme, il relativo teorema di CARATHÉODORY, il delicato studio sulla corrispondenza dei punti al contorno formano l'oggetto del Capitolo IV. I due Capitoli seguenti sono dedicati alle famiglie di funzioni meromorfe, il cui studio presenta, in confronto di quelle delle famiglie di funzioni regolari in un campo, talune difficoltà: all'estensione a queste dei teoremi di SCHOTTKY e di LANDAU; infine alla ricerca delle funzioni meromorfe dette eccezionali e che formano oggetto di un notevole teorema di OSTROWSKY.

Il Capitolo VII si propone di dare condizioni sempre meno restrittive per la convergenza uniforme di una successione di funzioni entro un dato campo, che può essere il cerchio $|z| < 1$: vi si trova esposto il noto teorema di VITALI, l'essenziale generalizzazione che ne ha dato il BLASCHKE, l'estensione alle funzioni non limitate, la condizione espressa dalla convergenza della serie in punti del contorno costituenti un insieme di misura positiva. Nel Capitolo VIII è esposta per sommi capi una delle più interessanti applicazioni della teoria delle famiglie normali: quella riferentesi alla questione dell'iterazione delle funzioni razionali, che, trattata da tempo « in piccolo » da SCHROEDER e KOENIGS, ha potuto essere risolta « in grande » nei recenti lavori di FATOR e JULIA, ed in essi l'uso dei teoremi sulle famiglie normali si è mostrato di grande utilità. Il Capitolo IX è rivolto allo studio delle famiglie di due variabili: infine nel Capitolo X si introduce e si esamina un nuovo concetto: quello dei sistemi complessi di famiglie normali; a base del quale sta la definizione di combinazioni eccezionali di funzioni. S'intende con ciò, date ν funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_\nu(x)$, la esistenza di uno speciale sistema di costanti $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ tali che

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_\nu f_\nu(x)$$

non assuma il valore zero. In particolare si dimostra che date ν funzioni intere, di cui una almeno trascendente, il numero delle combinazioni eccezionali non può superare $2\nu - 1$.

Questa rapida analisi vale a dare una idea del ricco contenuto

del libro. In quanto alla redazione, dovuta ad un discepolo dell'A., il sig. J. BARBOTTE, essa è piana e scorrevole: solo si può notare la scarsità dei richiami, in qualche punto una scelta delle notazioni che potrebbe essere più perspicua, ed un uso forse soverchio delle dimostrazioni per riduzione all'assurdo. Queste minuzie non tolgono però nulla al valore delle lezioni del MONTEL, la cui lettura è da raccomandarsi ad ogni cultore dell'Analisi, ed in particolare ai giovani laureandi delle nostre Università. (s. p.)

G. FUBINI-E. CECI: *Geometria proiettiva differenziale*. Tomo II, pagine 406. (Bologna, Nicola Zanichelli, 1927).

Nel n. 5 dell'anno V (dicembre 1926) del *Bollettino*, riferendo del tomo I di questo Trattato, già detti conto delle sue linee generali, e cercai di mettere in luce l'importanza e l'interesse del nuovo indirizzo dato dal FUBINI alla Geometria proiettiva differenziale; indirizzo che senza dubbio ha contribuito largamente a far superare alla Geometria differenziale la crisi che la travagliava, in quanto che sembrava destinata ad aggirarsi sempre entro gli stessi confini. Perciò ora, nel riferire del tomo II, basterà che io accenni al contenuto dei singoli capitoli.

I primi tre proseguono più immediatamente il tomo I, trattando ancora della teoria delle superficie dello spazio ordinario.

Nel Cap. VIII (primo del tomo II) si determinano tutte le superficie non rigate S che ammettono un gruppo continuo G_r (a r parametri) di deformazioni proiettive in sé, con $r=1$ o $r=2$ (necessariamente, per precedenti risultati). Quelle che ammettono un G_2 risultano essere tutte comprese fra le superficie isoterme-asintotiche la cui prima forma fondamentale normale ha curvatura costante (già determinate nel Cap. VII), e vengono prima determinate da tal punto di vista indiretto (§ 71); poi da un secondo, che è diretto ed estendibile anche agli iperspazii (§ 72). La ricerca delle S che ammettono un G_1 è più difficile e laboriosa (§§ 74-78), tranne nel caso (§ 73) in cui le traiettorie di G_1 (curve di S invarianti rispetto a G_1) siano asintotiche di S .

Nel Cap. IX si riprendono le ricerche, iniziate nel Cap. III, relative all'intorno (sino al 3° ordine) di un punto O di una superficie S , sia ripresentando in coordinate curvilinee qualunque risultati già dati in coordinate asintotiche, sia aggiungendone dei nuovi. Anzitutto da una nuova forma delle equazioni differenziali fondamentali (§ 79) vien ritrovata, per la prima volta in coordinate qualunque, la nota *quadrica di Moutard* relativa ad una tangente di S per O . Vengono poi (§ 81) introdotte e studiate certe corrispondenze

biunivoche $\Sigma(c)$ tra i piani della stella di centro O e i punti del piano tangente in O , le quali comprendono, per valori particolari della costante arbitraria c , corrispondenze già note: quella subordinata dalla polarità rispetto alla quadrica di LIE ($c=0$) e la *corrispondenza di Segre* ($c=-3$). Nel caso di una S rigata l'insieme delle $\Sigma(c)$ relative a tutti i punti O di una stessa generatrice fornisce poi (per ogni c fissato) una corrispondenza birazionale tra i punti e i piani di tutto lo spazio (§ 82). Nel § 83 si estendono alle metriche di WEYL e alle loro geodetiche i risultati dei §§ 15 e 23, relativi al caso particolare della metrica di RIEMANN di elemento lineare F_2 (1^a forma fondamentale di S), e si fa rilevare un altro caso particolare notevole (prima inosservato) caratterizzato dal fatto che le geodetiche formano un fascio (nel senso spiegato nel § 23). Infine nel § 84 si ritrovano in coordinate qualunque le *rette canoniche*, già trovate (Cap. III) in coordinate asintotiche.

Nel Cap. X vien proseguito lo studio dell'intorno di O , spingendosi fino al 4° ordine. Strumento essenziale è uno studio approfondito delle quadriche di MOUTARD relative alle varie tangenti in O (§§ 85-88), che consente poi (§ 89) anche di assegnare un significato geometrico ai più semplici invarianti proiettivi che si son presentati (§ 61) nel trattare il primo problema dell'applicabilità proiettiva. Il capitolo si chiude con l'esame (§ 90) della connessione tra le quadriche di MOUTARD relative a una S non rigata e quelle relative alle rigate asintotiche di S , e (§ 91) con un nuovo studio del *cono di Segre* e delle *pangeodetiche* (già considerati nel tomo I).

Nel Cap. XI è esposta la geometria proiettiva differenziale dei complessi e delle congruenze di rette, costruita con lo stesso metodo usato per le superficie e che conduce a individuare detti enti, a prescindere da collineazioni ⁽¹⁾, mediante una coppia di forme differenziali del 1° ordine (rispett. di tre o due variabili u_i) dette perciò *fondamentali*.

Per un complesso ambedue le forme sono quadratiche: la prima φ uguagliata a zero dà le sviluppabili (§ 94); la seconda χ vien desunta (§ 96) dall'esame dei complessi lineari tangenti al complesso in una sua retta, ed è apolare a φ . φ e χ (o meglio χ^2) sono intrinseche ed invarianti per collineazioni unimodulari; invece per una collineazione moltiplicativa ρ ⁽²⁾ si riproducono moltiplicate per ρ^4 e ρ^2 , sicchè intanto $\varphi:\chi^2$ è intrinseco e invariante per collinea-

(1) E precisamente da quelle che non alterano l'*orientazione* delle rette (nel senso definito nei §§ 1 e 2 del tomo I).

(2) Per queste diciture cfr. la recensione sul tomo I.

zioni, e può esser chiamato *elemento lineare proiettivo* del complesso. Ma si possono rendere tali le stesse φ e γ , normando le coordinate di punto (e in conseguenza quelle di retta e le φ , γ) con legge intrinseca e invariante per collineazioni: basta imporre un valore numerico fisso (non nullo) a uno degli invarianti algebrici simultanei di φ e γ , considerate come forme algebriche nei differenziali [§ 96, c)]. Allora la φ normata può assumersi come elemento lineare di una metrica proiettiva che consente di introdurre anche per i complessi le nozioni di *distanza*, *angolo*, *geodetiche*, ecc.: così come $\varphi:\gamma^2$ consente di introdurre il concetto di *pangeodetiche* (come per le superficie). Che le φ , γ individuino il complesso risulta dalle *equazioni differenziali fondamentali* (§ 97) a cui soddisfanno le coordinate di una retta del complesso.

Per le congruenze la prima forma fondamentale è la stessa φ (ma binaria). La seconda Φ è biquadratica, e vien suggerita dalla equazione differenziale complessiva delle asintotiche delle due falde della superficie focale (§ 100). Che φ e Φ individuino la congruenza risulta dalle equazioni differenziali fondamentali (§ 101). Esse sono intrinseche, e per una collineazione risultano alterate per un fattore comune, sicchè è invariante soltanto il loro rapporto: ma anch'esse si possono normare in modo intrinseco e invariante, e allora si può costruire, anche per le congruenze una metrica proiettiva di elemento lineare φ .

Il concetto di *applicabilità proiettiva*, di 1° o di 2° ordine, si estende (da due superficie) a due congruenze o complessi, chiamando così una corrispondenza biunivoca che operi come una collineazione (ma senza esser tale) fino all'intorno di 1° o di 2° ordine di due rette corrispondenti. E si riconosce che: due congruenze o complessi sono applicabili del 1° ordine solo quando le loro prime forme fondamentali φ si possono rendere proporzionali con una trasformazione dei parametri u_i di uno di essi; e allora la trasformazione stessa realizza l'applicabilità, nella quale perciò le sviluppabili si corrispondono [§ 103, A)]. Non esistono coppie di complessi applicabili di 2° ordine [§ 97, B)]; invece esistono coppie di congruenze siffatte, e il loro studio è interessante specialmente per i suoi legami con lo studio degli invarianti di un sistema coniugato di una superficie [§ 103, B), ..., J)].

Il Cap. XII (ed ultimo) costituisce una introduzione alla geometria proiettiva differenziale degli iperspazii, nella quale si estendono i metodi usati per lo S_3 .

Così si estende immediatamente alle ipersuperficie V_n di un S_{n+1} la teoria costruita per $n=2$, introducendo (§ 104) anche per esse le forme F_2 , F_3 , P (con la duale π); però qui, a differenza

del caso $n = 2$, si trova (§ 107) che in generale le F_2 , F_3 (da sole) già individuano la V_n a prescindere da collineazioni, e che quindi la V_n non è suscettibile di deformazioni proiettive. Un fatto nuovo si riscontra pure quando si vuole (§ 106) *nel modo più semplice possibile* (nel senso spiegato per il caso $n = 2$) normare le coordinate di punto e di iperpiano tangente (quindi le F_2 , F_3 con esse costruite) e definire la retta da chiamarsi *normale proiettiva* (problemi strettamente connessi): si trova cioè che non vi è un solo metodo possibile, come accadeva nel caso $n = 2$. Fra le estensioni di carattere più strettamente geometrico è da rilevare (§ 105) la *quadrica di Cech* che è una elegante estensione della conica osculatrice a una curva piana (caso $n = 1$) e della quadrica di LIE (caso $n = 2$): essa conduce anche alla estensione del teorema di MOUTARD.

La V_n è una particolare varietà di *elementi*, cioè di coppie di punti e iperpiani appartenentisi, di S_{n+1} : orbene la precedente teoria si lascia estendere (§ 108) ad una V_n di elementi di un S_{n+1+d} con $d > 0$.

Anche la teoria delle superficie rigate svolta nel Cap. IV si lascia estendere in un S_{n+1} con $n > 2$, dovendosi però distinguere il caso n pari (§ 112) da quello di n dispari (§ 113).

Difficoltà ben maggiori presenta lo studio di una generica V_r luogo di punti di un S_{n+1} , per $2 < r < n$; qui (§§ 109-111), a titolo di esempio, vien considerato il caso più semplice di $n = 3$, e precisamente di una V_2 non parabolica di S_4 .

Il volume termina con quattro notevoli Appendici di varii Autori.

Nella prima G. TZITZEICA espone le idee che lo hanno guidato nelle sue ricerche sulle *superficie* S e sui *reticolati* R .

Nella seconda E. BOMPIANI sintetizza un gruppo di suoi interessanti lavori nei quali ha cercato di dare un fondamento geometrico diretto alla geometria proiettiva differenziale delle curve e delle superficie (dello spazio ordinario) che, come si è visto, ha ricevuto col presente trattato un assetto a fondo prevalentemente analitico. Non è qui possibile accennare alla larga messe di risultati da lui conseguiti, e con varii metodi che sono interessanti per se stessi perchè passibili di ulteriori sviluppi ed applicazioni (anche in altre geometrie). Mi limiterò a notare che la semplicità di alcune sue interpretazioni geometriche dell'arco, delle curvature ecc. (proiettivi) di una curva, delle forme fondamentali normali e dell'elemento lineare proiettivo di una superficie mettono ancor meglio in luce tutta l'opportunità dell'introduzione di questi enti avvenuta per via puramente analitica.

Nella terza appendice A. TERRACINI espone alcuni dei risultati di geometria differenziale negli iperspazii conseguiti principalmente dal SEGRE, dal BOMPIANI e da lui stesso. In gran parte (§§ 1-7) vertono sulle varietà V_k di un S_n tali che la dimensione degli spazii r -tangenti è inferiore di i unità a quella massima consentita; ciò avviene quando la V_k rappresenta un sistema di i equazioni lineari omogenee alle derivate parziali fino a quelle di ordine r , nel senso che le coordinate proiettive omogenee di un punto descrivente la V_k sono soluzioni di un sistema siffatto. Altri risultati (§§ 8 e 9) riassumono i noti lavori del BOMPIANI sulle linee *quasi-asintotiche* di una V_k (estensioni delle asymptotiche di una V_2 di S_3) e sulle varie estensioni dei *sistemi coniugati* a una V_2 di un S_4 con $n > 3$. Altri infine (§§ 10-12) vertono sulle varietà luoghi di spazii (in particolare, di rette) studiando quelle che hanno qualche speciale carattere, per esempio il carattere di sviluppabile (che può essere inteso in vari modi).

Nella quarta appendice A. TERRACINI espone i risultati, da lui ottenuti da un punto di vista prevalentemente sintetico, sulle superficie aventi le asymptotiche (almeno di un sistema) in complessi lineari, superficie che nel presente trattato (tomo I, §§ 18 e 49) sono state determinate e studiate per via analitica.

G. SANNI

C. E. WEATHERBURN: *Differential Geometry of three dimensions* (Cambridge, of the University Press, 1927, pag. XII-268).

È un trattato elementare di geometria differenziale delle curve e delle superficie nello spazio ordinario, condotto con metodo vettoriale. L'A. (professore al *Canterbury College*, Nuova Zelanda) fa uso, generalmente, soltanto delle nozioni e delle operazioni più elementari relative ai vettori e ai campi vettoriali: il suo calcolo, a parte le differenze nelle notazioni, è assai vicino a quello di BURALI-FORTI e MARCOLOGNO, usato ad esempio negli « *Elementi* » del SIBIRANI (Man. Hoepli, 1924). In complesso, si deve riconoscere che l'A. dà una esposizione di notevole semplicità e spigliatezza. Va notato però che, forse per conservare dappertutto al suo libro un carattere elementare e « *introduttivo* » (pag. V), l'A. non fa alcun uso dei simboli di CHRISTOFFEL e RIEMANN, nè ricorre mai, comunque, a procedimenti o a nozioni di calcolo differenziale assoluto. Ma questa può dirsi una semplificazione? Le classiche *Lezioni* del BIANCHI, a cui pure (come ai trattati del FORSYTH e dell'EISENHART) l'A. dichiara di essersi ispirato nella preparazione del suo volume, mostrano nel modo più convincente come riesca

rimunerativa l'introduzione di quei simboli: e d'altra parte ciò che vi era in essi di innegabilmente arido e astratto, dopo la memoria del LEVI-CIVITA sul parallelismo e i conseguenti studi del WEYL e del CARTAN è ormai scomparso. È ben noto come la nozione di *parallelismo*, o di *connessione*, conduca a quei simboli in modo del tutto naturale.

Ma, tornando al WEATHERBURN, indicherò ora sommariamente gli argomenti trattati nella sua opera: soltanto sull'ultima parte di questa mi tratterò un po' più a lungo, perchè è la parte più personale, e quindi più nuova e interessante.

Dopo una Introduzione sulle notazioni e formule vettoriali, l'A. svolge nel Cap. I lo studio delle *curve con torsione*, e nel Cap. II quello degli *inviluppi*, o *superficie sviluppabili*. Indi passa alla teoria delle *superficie*: dà, nel Cap. III, le prime nozioni fondamentali (coordinate curvilinee, forme fondamentali), e svolge nel Cap. IV gli elementi dello studio delle *curve su di una superficie*. Nel Cap. V introduce le equazioni fondamentali e le equazioni di GAUSS e CODAZZI: enuncia, senza dimostrarlo, il teorema relativo alla determinazione della superficie mediante le sue due forme fondamentali. Il Cap. VI è dedicato, principalmente, alle linee *geodetiche* e ai sistemi di curve geodeticamente parallele: nel Cap. VII si studiano le *quadriche* (abbastanza ampiamente) e poi le superficie *rigate*. Il Cap. VIII svolge le nozioni fondamentali relative alle evolute ed evolventi delle superficie, alle superficie parallele o inverse di una data. L'A. viene poi (Cap. IX) a studiare brevemente le rappresentazioni *conformi* di una superficie su di un'altra, e dà un cenno sulla rappresentazione sferica e sulle superficie minime. Nel Cap. X sono trattate, in modo elementare, le congruenze di rette, e poi si ha un cenno sulle congruenze di curve: nel Cap. XI troviamo i primi elementi dello studio dei sistemi tripli ortogonali di superficie.

Fin qui, salvo la forma vettoriale, e la limitazione alle parti meno complesse della teoria, l'esposizione non si scosta in modo notevole dalle trattazioni usuali, che prendono le loro linee generali dalle *Lezioni* del BIANCHI. Nel Cap. XII (*Invarianti differenziali per una superficie*) e nella *Conclusione* (*Ulteriori recenti progressi*), l'A. dà invece conto di alcuni suoi risultati personali, da lui ottenuti quando l'opera era già in corso di pubblicazione, onde tali risultati non hanno potuto venire incorporati nelle parti dell'opera a cui si riferivano. L'A. parte dalla considerazione di campi scalari e vettoriali assegnati su di una superficie, poi quali campi egli determina dei sistemi di invarianti differenziali, scalari e vettoriali: la novità interessante sta nel considerare campi di vettori

spaziali, non soltanto tangenziali, applicati ai punti della superficie. A questi campi l'A. estende, fra l'altro, le nozioni di *divergenza* e di *rotore*. Tra le svariate interessanti applicazioni che poi l'A. dà di queste nozioni, questa è particolarmente semplice: la *curvatura media* J di una superficie di un punto è data da $J = -\operatorname{div} \mathbf{n}$, ove $\mathbf{n}$ è il vettore unitario normale, opportunamente orientato. Altre formule semplici sono stabilite per la *curvatura totale* K (pag. 231, 235, 262). Siccome, estendendo anche ai campi vettoriali a una dimensione (campi di vettori dello spazio applicati ai punti di una curva) le nozioni da lui stabilite pei campi a due dimensioni, l'A. trova per κ e $-\tau^2$, (κ e τ essendo la 1^a e la 2^a curvatura di una linea gobba) espressioni del tutto analoghe a quelle trovate per J e per $2K$, egli usa le denominazioni: *prima* e *seconda curvatura* al luogo delle usuali: *curvatura media* e *totale*.

Noterò ancora: detto $\mathbf{t}$ il vettore unitario tangente a una curva sulla superficie, ed $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale a questa, le componenti di $\operatorname{rot} \mathbf{t}$ nelle direzioni di $\mathbf{n}$, di $\mathbf{t}$, e della normale comune $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ sono la curvatura geodetica, la torsione geodetica e la curvatura normale della linea considerata (pag. 250). Se invece di una linea, consideriamo un sistema ∞^1 di linee sulla superficie, $\operatorname{div} \mathbf{t} = 0$ è l'equazione della *linea di stringimento* del sistema, e quindi, l'annullarsi identico di $\operatorname{div} \mathbf{t}$ è la condizione perchè le curve siano *parallele* (pag. 258).

Due brevi Note, relative la prima all'angolo di due direzioni tangenziali, la seconda alle curvature di una superficie, chiudono il volume: il quale porta anche, opportunamente scelti e raggruppati alla fine di ciascun Capitolo, molti interessanti esercizi.

ENEA BORTOLOTTI

G. JULIA: *Éléments de géométrie infinitésimale*. (Paris, Gauthier-Villars, 1927, pag. VI-242).

Questo libro, come l'A. avverte nella prefazione, ha specialmente lo scopo di « servire d'introduzione allo studio dei trattati di Geometria Superiore, del tipo di quello di DARBOUX ». Si tratta, in effetto, di un corso di lezioni, svolte dall'A. alla Sorbona, sulle *Applicazioni geometriche del Calcolo*. Dunque lo studio della geometria differenziale (metrica) delle curve, delle superficie e delle congruenze di rette (nello spazio ordinario) viene soltanto abbozzato, e condotto fino ai primi più essenziali risultati, senza uscire dal campo elementare. Però gli argomenti trattati ricevono uno sviluppo ampio e minuzioso: sia nell'ampiezza della trattazione di certe teorie che meglio si prestano a dare utile illustrazione o

applicazione di nozioni e di teoremi che si sviluppano nei corsi di Analisi, sia nell'accuratezza e nel rigore della esposizione — condotta con metodo prevalentemente analitico, pur senza rifuggire da procedimenti sintetici quando se ne presenti l'occasione — l'opera si scosta notevolmente dalle esposizioni delle « applicazioni geometriche », quali esse vengono date usualmente nei corsi di Calcolo.

Riguardo al metodo seguito dall'A. nella sua esposizione, è interessante anche il notare che egli usa, volta a volta, secondo la natura della questione trattata, procedimenti vettoriali, o il metodo delle coordinate: ai primi ricorre per semplificare gli sviluppi relativi a questioni di carattere generale, mentre nelle questioni particolari egli usa invece sistemi di riferimento scalare scelti in modo opportuno. In questo modo, l'A. tende a render famigliari al lettore entrambi i metodi, e insieme, a dargli una chiara visione dei vantaggi particolari che ciascuno di essi presenta, e a guidarlo nella scelta del metodo più appropriato per la trattazione di una questione determinata.

Si può dire, in complesso, che lo scopo di fornire un *collegamento* tra le teorie dell'Analisi e quelle della Geometria Differenziale, e di formare solide basi per ulteriore studio di queste ultime teorie, è assai ben raggiunto.

Verrò a un breve riassunto dell'opera. Dopo alcune generalità sulla rappresentazione analitica delle curve e delle superficie, l'A. dà, nel Cap. I, anzitutto un'ampia e rigorosa esposizione della *teoria del contatto* (da un punto di vista esclusivamente *metrico*, basandosi su un'accurata valutazione della parte principale della distanza di una curva o di una superficie da un punto che ad essa si avvicini indefinitamente). La teoria del contatto viene poi applicata allo studio degli *inviluppi*, svolto anche questo in modo ampio e completo: è particolarmente notevole lo studio che l'A. svolge sulle *congruenze di curve* nello spazio, e sui *punti* e le *falde focali* di tali congruenze. Indi l'A. viene ad applicare le considerazioni prima svolte per le curve qualsiansi, al caso delle famiglie ad 1 o a 2 parametri di *rette* nello spazio, studiando le superficie rigate, sviluppabili o gobbe, e poi le *congruenze di rette*. L'estesa trattazione che troviamo per questi ultimi enti geometrici si scosta assai dalle trattazioni ordinarie: essa è condotta in buona parte con metodo sintetico, e viene completata nei successivi Capitoli dallo studio delle congruenze particolari, formate dalle normali a una curva o ad una superficie, studio in cui si inquadrano bene molti noti risultati.

Il Cap. II è dedicato alla teoria delle *curve nello spazio*. Dopo avere introdotto e studiato gli *elementi osculatori* a una curva in

un punto, l'A. viene all'esame delle *proprietà intrinseche* di una curva; dedica poi qualche pagina a curve particolari, come le eliche cilindriche e le curve piane.

Il Cap. III si inizia con uno studio delle proprietà generali delle superficie e delle linee tracciate su di esse; per queste ultime si giunge fino ai classici risultati di MEUSNIER, EULERO, O. BONNET. Indi l'A. sviluppa le proprietà essenziali delle linee di curvatura, dei sistemi coniugati e delle linee asintotiche; poi espone varie interessanti considerazioni (a cui ho già fatto allusione) sulle congruenze normali, e uno studio particolarmente notevole sulle *rette singolari* di una congruenza.

Il Cap. IV, infine, tratta il problema della rappresentazione di una superficie su di un'altra, con particolare riguardo alle rappresentazioni *isometriche* e *conformi*. Chiudono l'opera due brevi note sugli *elementi immaginari* e sul *calcolo vettoriale*.

ENEAS BORTOLOTTI

H. L. RIETZ: *Mathematical Statistics*. Chicago. « The open court publishing company », pag. VII+181. prezzo 2 dollari.

Questo libro è il terzo della Collezione « The Carus Mathematical Monographs ». Secondo gli intenti della fondazione il compito di questi volumetti consiste nel divulgare le teorie matematiche rendendole più accessibili e attraenti ai molti che si interessano di matematica ma non sono specializzati nella teoria presentata.

E, come gli altri della serie, anche questo assolve lodevolmente il suo compito. Il libro è diviso in sette capitoli di cui il primo espone la natura del problema e il secondo, con esempi semplici, il concetto di frequenza; il terzo tratta delle curve di frequenza e il quarto della correlazione. Gli ultimi tre capitoli riferiscono sulle fluttuazioni del caso, sulla teoria di LEXIS e sulle serie di GRAM-CHARLIER.

La veste tipografica, molto chiara ed elegante, rende anche più attraente la lettura del volumetto. G. S.

J. A. SCHOUTEN: *Der Ricci-Kalkül*. Springer, Berlino, 1924, X+311.

In questo trattato di calcolo differenziale assoluto l'A. ha messo a profitto i suoi numerosi e noti studi sull'argomento. Il libro è diviso in sette capitoli, di cui il primo e il secondo contengono la parte algebrica e analitica del calcolo, mentre il terzo contiene la parte più importante per la teoria e le applicazioni;

cioè le proposizioni sulle condizioni di integrabilità e sul problema di PFAFF.

I tre capitoli seguenti trattano delle applicazioni a diverse forme di trasporto: cioè al trasporto per affinità, al trasporto secondo RIEMANN e a quello second WEYL. Infine l'ultimo capitolo tratta della riduzione per invarianza di grandezze di grado superiore.

Il libro, dopo quasi tre anni dalla sua pubblicazione, è troppo noto perchè sia necessario e utile un cenno più dettagliato.

G. G.

C. RUNGE und H. KÖNIG: *Vorlesungen über numerisches Rechnen*.

Con 13 figure e VII+372 pagine. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XI). Julius Springer, Berlin, 1924.

Ci piace di richiamare l'attenzione sulla presente opera, uscita poco più di tre anni fa, nella ormai ricca collezione diretta da R. COURANT. Tale opera, che contiene sostanzialmente le lezioni che gli Autori professarono successivamente nella stessa Università di Göttingen, ha eminentemente quelle doti di praticità necessarie a lavori di tale natura. I successivi Capitoli si riferiscono ai seguenti argomenti: Il calcolo numerico e le sue medie ausiliarie. Equazioni lineari. Il calcolo del pareggio. Le funzioni razionali intere. Il calcolo mediante serie. Equazioni ad un'incognita. Equazioni a più incognite. Approssimazione d'una funzione arbitraria mediante date serie. Integrazione e differenziazione numerica. Integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie. Risoluzione degli esercizi proposti successivamente in precedenza. È da augurarsi che un tale libro sia, anche fra noi, di guida nei frequenti calcoli numerici che si presentano nello studio della matematica, dell'astronomia e della fisica.

G. L.

L. BIEBERBACH: *Differentialgleichungen*. Seconda edizione, con 22 figure e X+358 pagine. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band VI). Julius Springer, Berlin, 1926.

Questo libro, del valente professore L. BIEBERBACH dell'Università di Berlino, che ha già ricevuto largo consenso, non può certo passare inosservato ai lettori del « Bollettino ». L'opera è divisa in quattro parti: nella prima parte vengono trattate le equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine (capitolo I: Metodi

elementari d'integrazione; capitolo II: Il metodo delle approssimazioni successive e sue diverse applicazioni; capitolo III: Discussione del cammino delle curve integrali; capitolo IV: Equazioni differenziali del primo ordine nel campo complesso; nella seconda parte sono trattate le equazioni differenziali del second'ordine (capitolo I: La esistenza delle soluzioni; capitolo II: Metodi elementari d'integrazione; capitolo III: Discussione del cammino delle curve integrali; capitolo IV: Equazioni differenziali lineari del second'ordine nel campo complesso); la terza parte tratta delle equazioni alle derivate parziali del prim'ordine e dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie; la quarta parte, infine, tratta delle equazioni alle derivate parziali del second'ordine (capitolo I: Generalità; capitolo II: Equazioni differenziali iperboliche; capitolo IV: Equazioni differenziali paraboliche).

Ciò che si deve rilevare soprattutto a favore del libro, è la chiara e sistematica esposizione a cui l'Autore è pervenuto mediante un notevole contributo di ricerche e di perfezionamenti personali.

o. i.

R. COURANT: *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung*. Band I: Funktionen einer Veränderlichen. Julius Springer. Berlin, 1927. (Pagine XIV+410, 127 figure, prezzo RM. 18.60).

Il presente primo volume dell'opera, che l'esimio fondatore e direttore dei « Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen » dedica alla sua Signora, merita d'essere segnalato anzitutto per la completa originalità nell'ordinamento e nella scelta della materia. Il Calcolo differenziale ed il Calcolo integrale non sono qui trattati separatamente, ma contemporaneamente in modo graduato, con una chiarezza ed un rigore ammirevoli: da tutto il libro trapela poi l'intimo legame fra i concetti analitici e le applicazioni. Il capitolo I contiene degli argomenti preparatori: il capitolo II tratta i concetti fondamentali del Calcolo differenziale ed integrale; i capitoli III e IV s'indugiano sul calcolo dei differenziali e degli integrali; il capitolo V contiene numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica ed alla fisica: il capitolo VI è dedicato alla formula di TAYLOR ed alla formula d'interpolazione di NEWTON; il capitolo VII accenna ai metodi numerici di calcolo; il capitolo VIII tratta delle serie in genere ed in particolare delle serie di potenze; il capitolo IX è tutto dedicato alle serie di FOURIER; il capitolo X, ed ultimo, considera le equazioni differenziali nei casi oscillatori più semplici. È da aggiungere che

ogni capitolo è corredato di un'appendice, la lettura della quale può essere omessa dallo studente in un primo studio.

Ciò che si deve dire, terminando, è che i notevoli pregi sopradetti, l'ottima veste tipografica, le numerose e belle figure, fanno prevedere che tale opera avrà fortuna e fra gli studenti e fra gli studiosi.

o. i.

BIBLIOGRAFIA

Libri ricevuti.

- MONTÉL PAUL. — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*. Recueillies et rédigées par J. BARBOTTE. (Collection de Monographies sous la direction de ÉMILE BOREL). Paris, Gauthier-Villars, 1927. Pag. VIII+306.
- COMITATO PRO OTTICA. — *Atti della prima manifestazione nazionale ottica*. Padova. 5-20 giugno 1927. Firenze, Tip. I. Conti. 1927. Pag. 437.
- CASSINIS GINO. — *Calcoli numerici, grafici e meccanici*. Fascicolo 2°. Pisa, Tip. Editrice Mariotti-Pacini, 1928.
- DE DONDER TH. — *Théorie des invariants intégraux*. Pag. 128+VI. Paris, Gauthier-Villars, 1927.
- DE DONDER TH. — *L'Affinité*. Pag. 94. Paris, Gauthier-Villars, 1927.
- BROGGI HUGO. — *Análisis matemático. Teorías generales. Funciones de más de una variable*. Vol. II. Pag. 211. La Plata, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, 1927.