
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: G. Julia, L. Fantappiè, R. Lagrange, M. Biernacki, J. Drach, R. Wawre, J. Chapelon, G. Polya, S. Minetti, J. Chokhatte, J. F. Ritt, M. Akimoff, M. Mandelbrojt, G. Alexitch, N. Podtlaguine, N. Bary, A. Kovanko, J. Wolff, M. Gevrey, P. Humbert, P. Urysohn, N. Gunther, A. S. Besicovitch, T. Radò, P. Flamant, L. Pomey, L. Tonelli, G. Cerf, A. Rossel, M. Riquier, E. Picard, J. Raramata, G. Valiron, S. Stoïlow, R. Wawre e Bruttin, J. Delsarte, E. F. Collingwood, S. Saks, P. Montel, M. Janet, N. Podtiaguine, E. Borel, M. Krawtchouk, A. Garnier, V. Smirnoff, A. Roussel, E. Goursat, G. Vranceanu, H. Mineur, E. Vessiot, M. Lainé, M. Kolmogoreff

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.1, p. 37–47.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_37_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1928.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Recensioni delle note di *Analisi* pubblicate nei « Comptes Rendus »,
T. 183 (2° semestre).

G. JULIA (« Comptes Rendus », T. 183. pag. 10).

Tra tutte le funzioni $\lambda(z)$ olomorfe in un campo limitato D semplicemente connesso contenente l'origine e tale che $\lambda(0)=0$, $\lambda'(0)=1$, la funzione $f(x)$ che dà la rappresentazione conforme di D su $|z| > \rho$ è quella per la quale il massimo di $|f|$ in D è il più piccolo possibile. Mostra, mediante questa idea, come si possa costruire f come limite d'una successione di polinomi convergente uniformemente in ogni campo interno a D . E tratta il caso di una frontiera a punti multipli ed un'area non semplicemente connessa.

L. FANTAPPIÉ (*Ibid.*, pagg. 12 e 179).

Considera una funzionale analitica F che è una funzione ordinaria di m funzionali lineari. Nella seconda nota l'autore ricerca la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzionale analitica F sia esprimibile mediante una funzione ordinaria d'una funzione $y(t)$ e delle sue n prime derivate, calcolate per m valori dati.

R. LAGRANGE (*Ibid.*, pag. 15).

Dà la rappresentazione delle funzioni di LEGENDRE mediante integrale definito che generalizza quelli di SCHÄFLI e LAPLACE: tratta di alcune funzioni associate e delle proprietà dei loro sviluppi in serie.

M. BIERNACKI (*Ibid.*, pag. 106).

Generalizza un teorema di LUCAS ⁽¹⁾, calcola il numero ρ tale che se il cerchio di raggio R contiene $n-1$ zeri d'un polinomio

(1) C. R., T. 67 (1861), pag. 163.

di grado n , il cerchio concentrico di raggio ρR contiene almeno $n - 2$ zeri della derivata del polinomio.

J. DRACH (*Ibid.*, pag. 109).

Continua una sua nota precedente ⁽¹⁾ sulla integrazione delle equazioni alle derivate parziali, e studia l'integrazione e la riduzione dell'equazione $r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$.

R. WAWRE (*Ibid.*, pag. 178).

Applicando il metodo delle successioni normali, tratta della riduzione dei campi per una sostituzione ad m variabili complesse e l'esistenza d'un sol punto invariante.

J. CHAPELON (*Ibid.*, pag. 381).

Indica alcuni minimi delle forme quadratiche a coefficienti interi riprendendo alcune ricerche di G. HUMBERT.

R. LAGRANGE (*Ibid.*, pag. 383).

Continua sulle funzioni di LEGENDRE e certe funzioni associate, e trova delle relazioni che forniscono delle somme dei prodotti dei coefficienti del binomio.

G. POLYA (*Ibid.*, pag. 413).

Tratta delle operazioni lineari che cambiano un polinomio $f(z)$ in $l_0 f(z) + l_1 f'(z) + l_2 f''(z) + \dots$; e ricerca la condizione perchè se tutte le radici di $f(z)$ sono un campo connesso dato, sia lo stesso delle radici del polinomio trasformato e fa delle applicazioni.

S. MINETTI (*Ibid.*, pag. 414).

Contiene le sue ricerche sul raggio di convergenza della serie di TAYLOR e sulle singolarità delle funzioni analitiche da esse definite.

J. CHOKHATTE (*Ibid.*, pag. 442).

Utilizza i polinomi di TCHEBYCHEFF a più variabili per limitare il valore assoluto di certi polinomi.

J. F. RITT (*Ibid.*, pag. 331).

Semplifica il teorema di LIOUVILLE cioè: se l'equazione

$$y' + y^2 = P(x),$$

⁽¹⁾ C. R., T. 182 (1926), pag. 1593.

ove P è algebrico, possiede una soluzione elementare, essa ha necessariamente una soluzione algebrica.

M. AKIMOFF (*Ibid.*, pag. 333).

Applica le trascendenti di FOURIER, BESSEL a più variabili agli sviluppi in serie trigonometrica delle funzioni condizionalmente periodiche.

M. MANDELBROJT (*Ibid.*, pag. 335).

Dà un teorema che permette di limitare inferiormente l'ordine nel punto singolare $z = 1$ d'una funzione olomorfa, possedente questa sola singolarità sul cerchio di convergenza $|z| = 1$.

G. ALEXITCH (*Ibid.*, pag. 338).

Considera una funzione analitica tale che per $\rho < 1$

$$\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) |d\theta| = G,$$

mostra che $Rf(e^{i\theta})$ e $If(e^{i\theta})$ sono allora delle serie di FOURIER conjugate: $f(e^{i\theta})$ è sommabile C di ogni ordine $2 \leq \lambda < \infty$ salvo forse su un insieme di misura nulla.

N. PODIAGUINE (*Ibid.*, pag. 340).

Riprendendo una definizione di ETTORE BORTOLOTTI sulla crescita relativa di due funzioni y, y_1 , enuncia una serie di risultati relativi alla crescita delle funzioni

$$y : r = \frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1} : r_1 = \frac{r'}{r} : \frac{y_1'}{y_1} : \dots$$

G. POLYA (*Ibid.*, pag. 467).

Continua la nota precedente: considera le operazioni funzionali lineari trasformanti l'espressione

$$\sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda_k z}$$

in

$$\sum_{k=0}^n L_k \lambda_k a_k e^{\lambda_k z}$$

e determina la forma che deve avere $L(x)$ per soddisfare a delle condizioni riguardanti le radici delle espressioni precedenti.

N. BARV (*Ibid.*, pag. 469).

Mostra che la classe delle funzioni verificanti la condizione (S) di BANACH coincide con quella di funzioni assolutamente continue di funzioni assolutamente continue.

A. KOVANKO (*Ibid.*, pag. 471).

Da alcuni teoremi sulla integrazione delle successioni di funzioni totalizzabili (integrabili secondo DENJOV).

J. WOLFF (*Ibid.*, pag. 500).

Continua una sua nota (¹): sia $F(z)$ una funzione olomorfa all'interno del cerchio $C(|z|=1)$ con $|F(z)| < 1$ e $F(z) = z$. Esiste su C un punto z ed uno solo tale che $w = F(z)$ contrae i cerchi tangenti a C in z .

M. GEVREV (*Ibid.*, pag. 544).

Estende alle equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico (ed a un numero qualunque di variabili) i risultati ottenuti recentemente sulle teorie del potenziale: unicità, continuità della soluzione, principio delle singolarità positive, funzione di GREEN.

P. HUMBERT (*Ibid.*, pag. 547).

Studia l'attrazione proporzionale ad $r^{-(2k+3)}$ d'una massa attrattante su un punto che fu chiamata da GREEN prepotenziale; studia come si possa calcolare nella sfera le soluzioni dell'equazione alle derivate parziali del prepotenziale.

P. URYSOHN (*Ibid.*, pag. 548).

Dà un esempio di una funzione analitica, che fornisce la rappresentazione conforme di una superficie di RIEMANN ad una infinità di fogli su un cerchio, ed il cui insieme di valori limiti sul cerchio è non misurabile B .

N. GUNTHER (*Ibid.*, pag. 551).

Connette a ciascun campo dello spazio un numero; l'insieme di questi numeri chiama quasi-funzione; mediante questo procedimento l'autore generalizza le nozioni conosciute come quella di integrale di STIELTJES.

¹ C. R., T. 182, pag. 918.

A. S. BESICOVITCH (*Ibid.*, pag. 553).

Definisce una densità superiore ed inferiore in ciascun punto i d'un insieme: se sono uguali, il punto i , detto regolare, dà delle proprietà di questi insiemi alcune delle quali generalizzano la classe delle curve rettificabili.

T. RADÓ (*Ibid.*, pag. 588).

Richiama alcuni risultati di LEBESGUE, ZOARD, GEÖCZE e di TONELLI sulla quadratura delle superfici curve e dà un procedimento di calcolo notevole che fornisce l'area di ogni superficie continua.

P. FLAMANT (*Ibid.*, pag. 590).

Considera delle operazioni distributive e delle definizioni assai generali di queste, e la norma di una funzione come generalizzazione della lunghezza di una funzione e fa delle applicazioni.

L. POMEY (*Ibid.*, pag. 642).

Generalizza un metodo considerato in una nota precedente sulla integrazione delle equazioni alle derivate parziali ad un numero finito di variabili, lo estende per equazioni alle derivate parziali ad un numero infinito di variabili e considera l'equazioni di primo ordine: il metodo consiste nella trasformazione in equazioni integro-differenziali.

L. TONELLI (*Ibid.*, pag. 645).

Utilizza la nozione di funzione $f(x, y)$ a variazione limitata e fa un'applicazione alla convergenza della serie doppia di FOURIER, generalizzando i criteri di convergenza classici per le serie di FOURIER semplici.

G. CERF (*Ibid.*, pag. 647).

Una equazione alle derivate parziali del primo ordine con la funzione incognita z delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

possiede ∞^{2n-1} curve caratteristiche, questo numero si riduce a ∞^1 per le equazioni lineari. Considera dei casi pseudo-lineari studiati da LIE, ENGEL, CARTAN, e dà dei criteri necessari e sufficienti

perchè nello spazio a $n + 1 = 4$, o 5 dimensioni esista ∞^{2n-k} ($k > 1$) curve caratteristiche.

A. ROUSSEL (*Ibid.*, pag. 650).

Dà in questa nota un procedimento che permetta di stabilire l'esistenza dell'estremo assoluto per una classe assai estesa di problemi isoperimetrici. Considera

$$I_c = \int_c F(y, x', y') ds. \quad \left(x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds} \right)$$

sostituendo s ad x come variabile, poi considera dei casi più generali.

M. RIQUIER (*Ibid.*, pag. 695).

Studia l'equazione di MONGE-AMPÈRE e indica delle condizioni sufficienti per la loro integrazione completa od incompleta.

J. CHOKHATTE (*Ibid.*, pag. 697).

Dà per i polinomi φ_n di TCHEBYCHEFF e delle loro derivate la valutazione asintotica seguente

$$\varphi_n^{(k)} = n^k \left[\frac{2z - a - b + 2\sqrt{(z-a)(z-b)}}{a-b} \right]^{n-k} \Phi_k(z),$$

$\Phi_k(z)$ non dipendente da n .

E. PICARD (*Ibid.*, pag. 709).

Studia certe equazioni alle derivate parziali che si riattaccano al problema dell'equilibrio calorifico.

J. RARAMATA (*Ibid.*, pag. 726).

Continua la sua nota ⁽¹⁾ della funzione di ripartizione $\alpha(x)$ di una successione α di numeri, e fa delle applicazioni alla successione $\varphi(\alpha)$, essendo $\varphi(x)$ integrabile nel senso di RIEMANN-STIELTJES.

G. VALIRON (*Ibid.*, pag. 728).

Dà una dimostrazione interessantissima e semplice, che si basa solo su dei teoremi classici, e sul teorema di BOREL sulle funzioni crescenti, del teorema di BLOCH ⁽²⁾ se la funzione $z = f(z) = z + \dots$

⁽¹⁾ C. R., T. 182 (1926), pag. 833.

⁽²⁾ C. R., 178 (1924), pag. 2051.

è olomorfa per $|z| < 1$, il campo riemanniano descritto da z comprende un cerchio ad un foglio di raggio superiore ad una costante assoluta ».

S. STOILOW (*Ibid.*, pag. 731).

Considera, estendendo alcune nozioni date da BANACH, le proprietà delle trasformazioni continue ad n variabili, definisce la derivata d'una trasformazione in un punto, ecc.

A. KOVANKO (*Ibid.*, pag. 733).

Completa alcune ricerche iniziate in note precedenti ⁽¹⁾ e dà alcune condizioni necessarie e sufficienti per la sommabilità di qualche funzione.

R. WAWRE e A. BRUTTIN (*Ibid.*, pag. 843).

Dimostrano semplicemente la proporzione seguente: se una trasformazione univoca e continua rigetta la circonferenza sul cerchio (insieme costituito dalla circonferenza e dal suo interno) esiste almeno un punto invariante sul cerchio.

J. DELSARTE (*Ibid.*, pag. 845).

Considera le rotazioni nello spazio funzionale.

E. F. COLLINGWOOD (*Ibid.*, pag. 847).

Estende un teorema che ha ottenuto con VALIRON e che fornisce la limitazione del numero degli zeri interni ad un cerchio, d'una funzione d'ordine dato.

S. SAKS (*Ibid.*, pag. 850).

Riprende i risultati ottenuti ⁽²⁾ sulle funzioni d'intervallo e quelli di TONELLI ⁽³⁾ e RADÒ ⁽⁴⁾, e stabilisce una formula che è la generalizzazione di quella di elemento d'area in coordinate cartesiane.

P. MONTEL (*Ibid.*, pag. 940).

Considera una famiglia chiusa di funzioni olomorfe in un cerchio C ed una successione di anelli concentrici circolari di

⁽¹⁾ *C. R.*, T. 180 (1925), pag. 1899.

⁽²⁾ *C. R.*, T. 180 (1925), pag. 38.

⁽³⁾ *C. R.*, T. 182 (1926), pag. 1198.

⁽⁴⁾ *C. R.*, T. 183 (1926), pag. 588.

spessore positivo o nullo, di diametro tendente verso zero, e dimostra che esiste un numero intero m tale che la regione del piano coperto dai punti $f(z)$ contiene almeno uno dei m primi anelli della successione.

M. JANET (*Ibid.*, pag. 942).

Sulla possibilità di immergere uno spazio riemanniano ad n dimensioni in un continuo euclideo ad $n(n+1):2$ dimensioni, risultato ammesso fino ad ora senza dimostrazione.

L. POMEY (*Ibid.*, pag. 943).

Utilizza le equazioni alle derivate parziali ad una infinita di variabili per integrare delle equazioni alle derivate parziali ordinarie ad una infinita di variabili. Dimostra un teorema d'esistenza e d'unicità.

N. PODTIAGUINE (*Ibid.*, pagg. 945 e 1017).

Confronta la crescita d'una funzione $y(x)$ a quella di x ed utilizza a questo effetto i concetti che ha introdotto recentemente. La crescita di y sarà regolare se l'ordine di grandezza di y in rapporto ad x è K (K è un numero qualunque positivo) o ω^k , o $k\omega^{-}$. La funzione la cui crescita è regolare l'A. la chiama regolare. Una tale funzione regolare è anche regolare nel senso di BOREL ⁽¹⁾, pone in relazione con i risultati di ETTORE BORTOLLOTTI ⁽²⁾, e dimostra nella seconda nota alcuni teoremi che completano quelli della prima; e che queste funzioni verificano una disuguaglianza dovuta a VAROPOULOS.

E. BOREL (*Ibid.*, pagg. 926 e 993).

Nella prima nota da un teorema sui sistemi di forme lineari a determinante simmetrico gobbo, nella seconda riporta alcune modificazioni.

M. KRAWTCHOUK (*Ibid.*, pag. 1008).

Generalizza i risultati di KRONECKER e HECKE nella distribuzione dei numeri primi. La formula che ottiene può riguardarsi come una generalizzazione del teorema di DIRICHLET sulla progressione aritmetica.

⁽¹⁾ *Leçons sur la théorie de la croissance*; Paris, 1910, pagg. 36-39-40; *Leçons sur les fonctions entières*. Paris, 1900, pag. 107.

⁽²⁾ « *Annali di Matematica* », 21 (1913-14), pag. 295.

A. GARNIER (*Ibid.*, pag. 1012).

Applicando il suo metodo per risolvere il problema di RIEMANN ⁽¹⁾ risolve il problema di PLATEAU per un poligono gobbo. E mostra per la condizione di SCHWARZ-JACOBI che nessuna singolarità algebrica non può arrestare il prolungamento della soluzione.

V. SMIRNOFF (*Ibid.*, pag. 1014).

Considera un teorema di LIAPOUNOFF sulla convergenza d'una serie di polinomi $\Sigma P_n x_n$, ove i P_n sono di grado minore od uguale di n ed uniformemente limitati qualunque sia x ($|x| < 1$): generalizza questo risultato considerando i punti x situati su un insieme chiuso di cui i complementari debbono essere semplicemente connessi.

A. ROUSSEL (*Ibid.*, pag. 1016).

Applica il metodo indicato recentemente alla ricerca delle condizioni sufficienti per l'estremo d'un integrale doppio di una funzione di

$$x, y, z, p, q, r, s, t.$$

M. RIQUIER (*Ibid.*, pag. 1076).

Espone un metodo per l'integrazione incompleta dell'equazione

$$r + 2A(x, z, p, q)s + C(x) = 0$$

che riconduce la questione alla integrazione d'una equazione del primo ordine.

E. GOURSAT (*Ibid.*, pag. 1078).

Mostra che il principio del metodo di RIQUIER risiede in una trasformazione di contatto simile a quella di AMPÈRE.

P. MONTEL (*Ibid.*, pag. 1081).

Introduce la definizione di funzioni *multivalente* in un dominio, e precisa alcuni risultati che ha ottenuto recentemente per mezzo delle nozioni di anelli concentrici. Ottiene dei teoremi che generalizzano quelli di LANDAU, FEKETE, BOHR.

(1) *Théorie des surfaces* 1. Paris, 1914, Livre III, Ch. XIII.

I. DELSARTE (*Ibid.*, pag. 1085).

Studia delle equazioni integrali a limiti fissi di secondo grado, che si incontrano in termodinamica.

G. VRANCEANU (*Ibid.*, pag. 1083).

Prosegue le sue ricerche sugli spazi non olonomi, mostra come vi si possono definire dei tensori, e come si possano applicare i metodi del calcolo differenziale assoluto allo studio di queste varietà.

H. MINEUR (*Ibid.*, pag. 1087).

Appoggiandosi sui risultati di R. LAGRANGE, studia nello spazio di RIEMANN le proprietà delle formule di TAYLOR generalizzate.

R. GARNIER (*Ibid.*, pag. 1250).

Continua le sue ricerche sulla risoluzione del problema di PLATEAU, e tratta delle generalizzazioni di risultati dovuti a BIRKHOFF.

E. VESSIOT (*Ibid.*, pag. 1252).

Fa alcune considerazioni sul teorema dimostrato da WAWRE e BRUTTIN facendo vedere che è equivalente ad una proposizione di POINCARÉ ⁽¹⁾ e presenta alcune generalizzazioni.

M. LAINÉ (*Ibid.*, pag. 1254).

Tratta di una equazione della forma $s = p\varphi(x, y, z, q)$ integrabile col metodo di DARBOUX.

G. VALIRON (*Ibid.*, pag. 1256).

Dimostra un importante teorema sui valori delle funzioni olomorfe in un cerchio, cioè ad ogni numero positivo ε corrisponde un numero $C(\varepsilon)$ tale che i valori di ogni funzione $Z = f(z)$ olomorfa per $|z| < 1$, nulla nell'origine di derivata uguale ad uno, ricopre tutto il cerchio $|z| < C(\varepsilon)$ salvo al più dei punti che possono essere racchiusi in un cerchio che è visto da $z = 0$ sotto l'angolo 2ε . Precisa le relazioni con alcuni teoremi di MONTEL, KOEBE, LANDAU, BOHR.

(1) « Journal de Math. » 4^a serie 2, 1886, pagg. 177-166.

P. MONTEL (*Ibid.*, pag. 1323).

Dimostra delle proprietà interessanti sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni meromorfe.

R. WAWRE (*Ibid.*, pag. 1325).

Considera

$$\varphi_i(x) = \frac{f_i(x)}{n_i}, \quad n_i^2 = \int_a^b f_i^2(x) dx, \quad f_{i+1}(x) = \int_a^b N(x, y) \varphi_i(y) dy$$

ove sul nucleo N si fanno delle ipotesi, mostra il legame fra la convergenza della successione φ_i e quella del prodotto $\pi \frac{n_i}{n}$ ove $n = \lim n_i$.

M. KOLMOGOREFF (*Ibid.*, pag. 1327).

Dà un esempio di una funzione sommabile la cui serie di FOURIER diverge dappertutto.

R. Università di Cagliari, giugno 1927.

GIUSEPPE BELARDINELLI