
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANGELO TONOLO

Una espressione dei simboli di
Riemann di prima specie per le
varietà immerse negli spazi euclidei

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.1, p. 34–36.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_34_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_34_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_34_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Una espressione dei simboli di Riemann di prima specie
per le varietà immerse negli spazi euclidei.**

Nota di ANGELO TONOLO (a Padova).

Nella Memoria *Geometria dello spazio Hilbertiano* di prossima pubblicazione negli « Atti del R. Istituto Veneto », il prof. VITALI, svolgendo alcuni concetti generali sopra le varietà a più dimensioni col sussidio della rappresentazione funzionale dei punti, ha incontrato una espressione rimarchevole dei simboli di RIEMANN

di prima specie. Anche tradotta in coordinate cartesiane, tale formula conserva la sua forma elegante, ed io mi propongo di dimostrarla in questa breve Nota, con i soliti algoritmi e conservando la notazione cartesiana.

Riferiamo i punti di uno spazio euclideo ad n dimensioni ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $x_1, x_2, \dots, x_n$, e siano

$$(1) \quad x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le equazioni parametriche di una varietà V_m ad m dimensioni immersa nello spazio considerato.

Conveniamo che i simboli $x'_{i|r}$, $x''_{i|rs}$, $x'''_{i|rst}$ indichino rispettivamente le derivate parziali $\frac{\partial x_i}{\partial u_r}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \partial u_s}$, $\frac{\partial^3 x_i}{\partial x_s \partial x_s \partial x_t}$. Il quadrato dell'elemento lineare di V_m è:

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{rs} a_{rs} du_r du_s,$$

ove:

$$(3) \quad a_{rs} = \sum_i x'_{i|r} x'_{i|s}.$$

Siano $x_{i|rs}$ le derivate covarianti della funzione x_i rispetto alla forma (2), e poniamo:

$$(4) \quad A_{pq,rs} = \sum_i x_{i|pq} x_{i|rs}.$$

Essendo $\left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ h \end{smallmatrix} \right\}$ i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie relativi alla forma (2), si ha:

$$x_{i|rs} = x''_{i|rs} - \sum_1^m \left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ h \end{smallmatrix} \right\} x'_{i|h}.$$

Quindi:

$$(5) \quad A_{pq,rs} = \sum_i \left[x''_{i|pq} - \sum_1^m \left\{ \begin{smallmatrix} pq \\ h \end{smallmatrix} \right\} x'_{i|h} \right] \left[x''_{i|rs} - \sum_1^m \left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ k \end{smallmatrix} \right\} x'_{i|k} \right].$$

Indichiamo con $\left[\begin{smallmatrix} rs \\ h \end{smallmatrix} \right]$ i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie relativi alla forma (2); si ha, notoriamente,

$$(6) \quad \left[\begin{smallmatrix} rs \\ h \end{smallmatrix} \right] = \sum_i x'_{i|h} x''_{i|rs},$$

$$(7) \quad \left[\begin{smallmatrix} rs \\ h \end{smallmatrix} \right] = \sum_k^m a_{hk} \left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

Sviluppando allora il prodotto nella (5), e semplificando, tenendo conto delle (3), (6), (7), si ottiene:

$$(8) \quad A_{pq,rs} = \sum_1^n x''_{i|pq} x''_{i|rs} - \sum_1^m \left[\begin{matrix} pq \\ h \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} rs \\ h \end{matrix} \right\}.$$

Dalla (6) si trae, per derivazione parziale rispetto alla variabile u_s ,

$$\frac{\partial}{\partial u_s} \left[\begin{matrix} pq \\ r \end{matrix} \right] = \sum_1^n x''_{i|pq} x''_{i|rs} + \sum_1^n x'_{i|r} x'''_{i|pqs}.$$

Perciò, ovviamente, dalla (8):

$$(9) \quad A_{pq,rs} = \frac{\partial}{\partial u_s} \left[\begin{matrix} pq \\ r \end{matrix} \right] - \sum_1^m \left[\begin{matrix} pq \\ h \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} rs \\ h \end{matrix} \right\} - \sum_1^n x'_{i|r} x'''_{i|pqs}.$$

Scambiamo fra loro nella (9) gli indici q, s : si ha:

$$(10) \quad A_{ps,rq} = \frac{\partial}{\partial u_q} \left[\begin{matrix} ps \\ r \end{matrix} \right] - \sum_1^m \left[\begin{matrix} ps \\ h \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} rq \\ h \end{matrix} \right\} - \sum_1^n x'_{i|r} x'''_{i|psq}.$$

Sottraendo la (10) dalla (9), i terzi termini dei secondi membri manifestamente si elidono, e si ottiene perciò:

$$(11) \quad A_{pq,rs} - A_{ps,rq} = \frac{\partial}{\partial u_s} \left[\begin{matrix} pq \\ r \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial u_q} \left[\begin{matrix} ps \\ r \end{matrix} \right] + \sum_1^m \left[\begin{matrix} ps \\ h \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} rq \\ h \end{matrix} \right\} - \left[\begin{matrix} pq \\ h \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} rs \\ h \end{matrix} \right\}.$$

Il secondo membro della (11) è il simbolo di RIEMANN di prima specie (pr, qs) relativo alla forma (2). Si ha quindi la relazione:

$$A_{pq,rs} - A_{ps,rq} = (pr, qs),$$

cioè:

$$(pr, qs) = \sum_1^n \left| \begin{matrix} x_{i|pq} & x_{i|ps} \\ x_{i|rq} & x_{i|rs} \end{matrix} \right|.$$

Ed è questa la formula che volevamo stabilire.

Padova, 3 gennaio 1928.