BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

Guido Voghera

Sulla forma canonica delle matrici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.1, p. 32–34.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_32_0>

Sulla forma canonica delle matrici.

Nota di GUIDO VOGHERA (a Trieste).

In numerosi problemi analitici e geometrici, in cui si applica la teoria delle matrici, la riduzione di queste alla loro forma canonica semplifica oltremodo le dimostrazioni e rende evidente la via percorsa.

Il teorema dell'esistenza della forma canonica è quindi di fondamentale importanza e si trova esposto sotto varie forme in moltissimi trattati e note, ma quasi tutte le dimostrazioni sono alquanto complicate ed involute, sicchè non mi sembra privo d'interesse di riportarne ancora una — che, per quanto mi consta, non fu ancora pubblicata — basata sulla ricorrenza da N a $N+1$, e che, essendo quasi immediata, rivela meglio l'essenza del procedimento.

Sia data una matrice quadratica di N^2 elementi, concepita, ad esempio, come sostituzione lineare dei vettori d'uno spazio N-dimensionale

$$s=(s_i^k) \qquad (s)\ldots.\ x'^k=s_i^k x^i \text{ (}^1\text{)}$$

esiste allora una trasformazione lineare delle coordinate dei vettori

$$a=[a_m^n] \qquad [a]\ldots.\ \bar{x}^n=a_m^n x^m$$

col determinante $|a_m^n|\neq 0$ e con l'inversa

$$a^{-1}=[\alpha_n^m] \qquad [a^{-1}]\ldots.\ x^m=\alpha_n^m\bar{x}^n$$

che ha la proprietà che la trasformata di s

$$\bar{s}=(\bar{s}_i^k)=a s a^{-1}=(a_l^k s_m^l \alpha_i^m) \qquad (\bar{s})\ldots.\ \bar{x}'^k=\bar{s}_i^k\bar{x}^i$$

(1) Gli indici latini assumono sempre tutti i valori da 1 fino a N: quando si deve includere anche lo 0, esso è indicato esplicitamente: come al solito si ommette il sommatorio dove due indici, l'uno covariante e l'altro controvariante coincidono nello stesso prodotto.

Si noti però che questa convenzione *non vale* per gli indici greci, che sono numeri interi positivi fissi, o di cui si indica il valore di volta in volta.

è ridotta alla *forma canonica*, vale a dire:

$\bar{s}_k^k = \rho_\alpha$ sono numeri complessi $\alpha = 1, 2, \ldots \mu$;

$\bar{s}_{k-1}^k = \varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha 1} = 0$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1$ se $\beta \neq 1$ con $\beta = 1, 2, \ldots \nu_\alpha$ per ogni valore di α;

$\bar{s}_i^k = 0$ per tutti gli $i \neq k$ e $k - 1$;

e inoltre:

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{\mu_1} \neq \rho_{\mu_1+1} = \rho_{\mu_1+2} = \ldots =$$
$$= \rho_{\mu_1+\mu_2} \neq \rho_{\mu_1+\mu_2+1} = \rho_{\mu_1+\mu_2+2} = \ldots = \rho_{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \neq \rho_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+1} \ldots$$
$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_{\mu_1}; \quad \nu_{\mu_1+1} \geqq \nu_{\mu_1+2} \geqq \ldots \nu_{\mu_1+\mu_2};$$
$$\nu_{\mu_1+\mu_2+1} \geqq \nu_{\mu_1+\mu_2+2} \geqq \ldots \geqq \nu_{\mu_1+\mu_2+\mu_3}; \quad \nu_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+1} \ldots$$

in cui

$$\Sigma\mu_\lambda = \mu, \qquad \Sigma\nu_\alpha = N.$$

La proposizione è evidente per $N = 1$; sia essa già dimostrata per N. Consideriamo una matrice $S = (S_i^k)$ di $(N+1)^2$ termini, con $i, k = 0, 1, 2, \ldots N$.

L'equazione in ρ

$$|S_i^k - \rho\delta_i^k| = 0 \qquad i, k = 0, 1, 2, \ldots N$$

in cui, come al solito, $\delta_i^k = 0$ per $i \neq k$, $\delta_i^k = 1$ per $i = k$, è risolubile in ρ; sia una delle sue radici $\rho = \rho_0$, esiste allora almeno un vettore $x^0 = a_0 x_0 + a_m x^m$, che è annullato dalla matrice $S - \rho_0 I = (S_i^k - \rho_0\delta_i^k)$, con almeno uno degli a. ammettiamo $a_p \neq 0$.

La trasformazione

[B] $$B_0^0 = a_0, \quad B_m^0 = a_m, \quad B_0^n = 0, \quad B_m^n = \delta_m^n \text{ se } p = 0$$

con l'eccezione

$$B_0^p = 1, \quad B_m^p = 0 \text{ se } p \neq 0$$

trasforma S in

(T) $$T_0^0 = \rho_0, \quad T_i^0 = 0, \quad T_0^k = s_0^k, \quad T_i^k = s_i^k.$$

Ora esiste una trasformazione $a = [a_m^n]$, che trasforma $s = (s_i^k)$ nella sua forma canonica $\bar{s} = (\bar{s}_i^k)$, quindi anche una di $(N+1)^2$ termini:

[C] $$C_0^0 = 1, \quad C_m^0 = 0, \quad C_0^n = 0, \quad C_m^n = a_m^n$$

che trasforma T in

(U) $$U_0^0 = \rho_0, \quad U_i^0 = 0, \quad U_0^k = \bar{s}_0^k, \quad U_i^k = \bar{s}_i^k$$

in cui $\bar{s}_k^k = \rho_\alpha$, $\bar{s}_{k-1}^k = \varepsilon_{\alpha\beta}$, e si mette $\bar{s}_0^k = a_{\alpha,\beta}$.

Prendiamo ora addirittura il caso più generale che sia ρ_0 eguale ad un altro dei ρ, si può sempre ottenere, con scambio degli indici della trasformazione a e C, che

$$\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = \dots \rho_{\mu_1}$$

e che il primo $a_{\alpha 1} \neq 0$ ocn $\alpha < \mu_1$ sia $a_{\lambda 1} = \bar{s}_0^{\pi}$; la trasformazione

$$[\mathrm{D}] \qquad D_0^0 = \frac{1}{a_{\lambda 1}}, \quad D_{\alpha\beta}^0 = 0, \quad D_0^{\alpha\beta} = \frac{D_0^{\alpha,\beta-1}\varepsilon_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}}{a_{\lambda 1}(\rho_\alpha - \rho_0)} \text{ per } \alpha > \mu_1$$

$$D_0^{\alpha\beta} = -\frac{a_{\alpha,\beta+1}}{a_{\lambda 1}} \text{ per } \alpha \leqq \mu_1, \ \beta \neq \nu_\alpha; \quad D_0^{\alpha,\nu_\alpha} = 0 \text{ per } \alpha \leqq \mu_1$$

$$\text{e tutti gli altri } D_i^k = \delta_i^k$$

trasforma U in

$$(\mathrm{V}) \qquad V_0^0 = \rho_0 \quad V_i^0 = 0 \quad V_0^k = 0 \ k \neq \pi, \quad V_0^\pi = 1, \quad V_i^k = s_i^k$$

che a sua volta, con la trasposizione

$$[\mathrm{E}] \quad E_0^0 = 0 \ \ E_0^k = \delta_{\pi-1}^k \ \ E_i^{k-1} = \delta_i^k \text{ per } k < \pi; \quad E_i^k = \delta_i^k \text{ per } k \geqq \pi$$

dà la forma canonica

$$(\bar{\mathrm{S}}) \quad \bar{S}_{i-1}^{k-1} = \bar{s}_i^k \text{ per } k \leqq \pi; \quad \bar{S}_{\pi-1}^\pi = 1, \ \bar{S}_i^\pi = \bar{s}_i^\pi \text{ per } i \neq \pi - 1;$$
$$\bar{S}_i^k = \bar{s}_i^k \text{ per } k > \pi.$$

La trasformazione

$$A = EDCB$$

trasforma quindi S in $\bar{S}$.

È ovvia la semplificazione delle formule se ρ_0 non è eguale a nessun altro ρ_α o se nessun $a_{\lambda 1} \neq 0$.

Trieste. novembre 1927.