Stefano Lodovico Straneo

Formula di trasformazione per le valutazioni degli operatori funzionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.1, p. 25–27.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Formula di trasformazione per le valutazioni degli operatori funzionali.

Nota di STEFANO LODOVICO STRANEO (a Roma).

Nello studio degli operatori funzionali [1], riesce talvolta agevole trovare la valutazione di un dato operatore applicato ad un particolare operando: in questo caso è molto importante sapere poi estendere a un operando generale il risultato trovato per l'operando speciale. Spesso, quando l'operatore si presenta sotto la forma $f(\Delta)$, ove Δ è $\frac{d}{dt}$, conviene scegliere come operando speciale la funzione $1(t)$, che per $t<0$ ha il valore 0, e per $t \geq 0$ ha il valore 1: questo operando è l'integrale della funzione impulsiva unitaria $Fu(t)$ [2].

Supponiamo di conoscere la valutazione dell'operatore $f(\Delta)$ applicato a $1(t)$, cioè sia

$$f(\Delta)1(t) = H(t). \tag{1}$$

Nell'ipotesi che $H(t)$ sia derivabile, eseguendo la derivazione si ottiene

$$H'(t) = \Delta H(t) = f(\Delta)\Delta 1(t) = f(\Delta)Fu(t).$$

Sia $V(t)$ la funzione a cui si deve applicare $f(\Delta)$.

Dai teoremi fondamentali del calcolo con gli operatori funzionali, è noto che qualunque funzione fisica $V(t)$ può essere posta simbolicamente sotto la forma [3]

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)Fu(t-\tau)d\tau. \tag{2}$$

Questo sviluppo, essendo simbolico, permette *per conseguenza della sua definizione,* di operare sotto il segno di integrale, e in

[1] O. HEAVISIDE, *Electromagnetic theory*. Volume II (London 1899).
G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica*. Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana. Vol. IX, fasc. 6° (dic. 1905), pag. 651-699.
J. R. CARSON, *Electric circuit theory and the operational calculus*. New York, 1926.

[2] G. GIORGI, Op. cit., art. 3.

[3] G. GIORGI, Op. cit., art. 4.

particolare conduce (1) a scrivere

$$f(\Delta)V(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)\, f(\Delta)Fu\,(t-\tau)\, d\tau.$$

Ma per quanto si è visto innanzi

$$f(\Delta)Fu(t-\tau)=H'(t-\tau)\, d\tau.$$

Risulta quindi

$$(3) \qquad f(\Delta)V(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)H'(t-\tau)\, d\tau.$$

formula che, nell'ipotesi della derivabilità di $H(t)$, risolve il problema.

Il caso di $H(t)$ non derivabile si può trattare con una modificazione della formula stessa. Approfittando del fatto che l'ordine delle operazioni $f(\Delta)$, Δ, è invertibile, e che $H'(t-\tau)=\Delta H(t-\tau)$, la soluzione ottenuta si lascia scrivere così

$$(4) \qquad f(\Delta)V(t)=\Delta\int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau)H(t-\tau)\, d\tau$$

e in questa formola $H(t)$ non è assoggettato a operazioni di derivazione.

Le equazioni ottenute servono per estendere a una qualunque funzione di t i risultati che HEAVISIDE ha trovati applicando vari operatori alla $1(t)$.

Per esempio, fu trovato da HEAVISIDE (2) e poi dimostrato dal GIORGI (3) che

$$\sqrt{\Delta}\cdot 1(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad \text{per } t>0.$$

Seguendo le notazioni precedenti, avremo

$$H(t)=\sqrt{\Delta}\cdot 1(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad \text{per } t>0.$$

(1) G. GIORGI, Op. cit., art. 4.
G. PEANO, *Resto nelle formule di quadrature, espresso con un integrale definito*: Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. XXII, serie 5ª (1° sem. 1913), pp. 562-569.

(2) O. HEAVISIDE, Op. cit., art. 227.

(3) G. GIORGI, Op. cit., art. 35.

e derivando

$$H'(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi t^3}} \qquad \text{per } t > 0.$$

Applicando infine la (3), si ha:

$$\sqrt{\Delta}\, V(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty V(\tau)\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\,d\tau.$$

Questa formula trova immediata applicazione nella risoluzione dei problemi di propagazione del calore.

Roma, 30 ottobre 1927.