Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Vitali

Sulle sostituzioni lineari ortogonali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.1, p. 1–7.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

PICCOLE NOTE

Sulle sostituzioni lineari ortogonali.

Nota di GIUSEPPE VITALI (a Padova).

Il prof. A. COLUCCI in un suo recente ed interessante lavoro [1] intorno alle equazioni del tipo

$$(1) \qquad f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0,$$

dove

$$(2) \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

è un determinante ortogonale, e quindi $\varepsilon = \pm 1$, citando un teorema di BRIOSCHI sullo stesso argomento usa un enunciato che è esente dalle imperfezioni di quello che si trova nel lavoro originale del BRIOSCHI [2], e quasi testualmente riprodotto in varii trattati fra i quali la più recente edizione del manuale di E. PASCAL: *I determinanti* [3], alla quale il COLUCCI si riferisce.

Dice il BRIOSCHI:

L'équation (1) *a, lorsque* n *est impair, une racine égale à l'unité et les autres* n — 1 *imaginaires et deux à deux réciproques; lorsque* n *est pair les racines sont toutes imaginaires et deux à deux reciproques.*

[1] *Sopra un teorema di Brioschi.* (« Boll. Un. Mat. It. », anno VI. n. 5), pp. 258-260.

[2] *Un théorème relatif aux determinants gauches.* (J. DE LIOUVILLE, t. XIX), pp. 253-256.

[3] Ed. 1923, p. 243.

Ma questo enunciato è contradetto dalle equazioni

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}=0$$

ed

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix}=0.$$

Nel seguito metterò anche in evidenza l'errore che ha condotto a tale risultato imperfetto, ma non è soltanto per tale scopo che io chiedo l'ospitalità di questo periodico.

Il lavoro del COLUCCI mi ha sorpreso mentre stavo redigendo una nota per dimostrare il seguente

Teorema A). — Una sostituzione lineare ortogonale sopra n variabili con $n=2p$ od $n=2p+1$ (p intero >0 e qualunque), in uno spazio lineare S_n ad n dimensioni, si può scomporre nel prodotto di p rotazioni dello spazio S_n intorno a p suoi spazi lineari di $n-2$ dimensioni, se il valore ε del determinante dei coefficienti è uguale ad 1, ed in un tale prodotto moltiplicato per una simmetria ortogonale rispetto ad uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni, se $\varepsilon=-1$.

Il COLUCCI nel suo lavoro, supponendo che il BRIOSCHI abbia dimostrato che tutte le radici reali di (1) hanno modulo $=1$ riesce a concludere che tutte le *radici di* (1) *hanno modulo uguale ad* 1.

Questa proposizione è vera e si potrebbe mettere sotto la forma del seguente

Teorema B). — Se (2) è un determinante ortogonale, esistono p valori reali

(3) $$\theta_j \qquad (j=1,\ 2,\dots\ p)$$

soddisfacenti alle limitazioni

$$0\leq\theta_j\leq\pi,$$

che possono essere tutti od in parte uguali, e per cui le radici della equazione

(4) $$\varphi(x)=\begin{vmatrix} \varepsilon a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}=0$$

sono date dalle

(5) $$e^{i\theta_j},\quad e^{-i\theta_j} \qquad (j=1,2,\dots p)$$

se $n=2p$, e dalle (5) insieme con $x=1$ se $n=2p+1$.

Per comodità chiamerò le (3) gli *argomenti* della equazione (4).

Ora questo risultato mi ha indotto a chiedermi se gli argomenti di (4) non hanno qualche relazione colla scomposizione in rotazioni della sostituzione lineare ortogonale di equazioni

$$(6) \qquad x_h' = \sum_1^n {}_k a_{hk} x_k, \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

ed ho facilmente concluso col seguente

Teorema C). — Se (6) sono le equazioni di una sostituzione lineare ortogonale, questa si può ottenere dal prodotto di p rotazioni intorno a p spazi lineari di $n-2$ dimensioni a due a due fra loro perpendicolari (¹) e le cui ampiezze sono gli argomenti di (4), o da un tale prodotto moltiplicato per una simmetria ortogonale rispetto ad uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni, secondo che $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon = -1$.

1. Ricordo che se (6) sono le equazioni di una sostituzione ortogonale si ha

$$(7) \qquad \sum_1^n {}_h x_h'^2 = \sum_1^n {}_k x_k^2 \text{ (²)}.$$

Sia λ una radice di $f(x) = 0$, esiste allora un sistema di valori non tutti nulli delle x_k per cui i primi membri delle (6) diventano uguali a λx_h.

Allora per la (7) sarà

$$\lambda^2 \sum_1^n {}_h x_h^2 = \sum_1^n {}_h x_h^2$$

da cui o $\lambda^2 = 1$, o $\sum_1^n {}_h x_h^2 = 0$.

E poichè se λ è reale le x_h possono essere assunte tutte reali, e quindi in modo che non sia $\sum_1^n {}_h x_h^2 = 0$, dovrà essere $\lambda = \pm 1$. Così è dimostrato che « tutte le radici reali di (1) hanno modulo 1 ».

Se λ è complesso, si ponga $\lambda = \mu + i\nu$, ed inoltre si indichi con $x_h = b_h + ic_h$ un sistema di valori delle x_h che faccia assumere ai primi membri delle (6) i valori λx_h.

(¹) Chiamo perpendicolari due spazi di $n-2$ dimensioni di un S_n, se, essendo S_{n-2} lo spazio comune, le rette di uno di essi perpendicolari ad S_{n-2} sono perpendicolari all'altro.

(²) V. p. es. E. Cesaro, *Analisi Algebrica*, 1894, pp. 53-55.

Sarà

(8) $$\mu b_h - \nu c_h = \Sigma_k a_{hk} b_k, \quad \mu c_h + \nu b_h = \Sigma_k a_{hk} c_k$$

ed inoltre

$$0 = \Sigma_h x_h^2 = \Sigma_h (b_h^2 - c_h^2) + 2i \Sigma_h b_h c_h,$$

da cui

(9) $$\Sigma_h b_h^2 = \Sigma_h c_h^2 \quad \text{e} \quad \Sigma_h b_h c_h = 0.$$

Quadrando e sommando le prime delle (8) si ha, tenendo conto delle (9)

$$(\mu^2 + \nu^2) \Sigma_h b_h^2 = \Sigma_h b_h^2,$$

e poichè non può essere $\Sigma_h b_h^2 = 0$ perchè altrimenti sarebbero tutte nulle le x_h, dovrà essere

$$\mu^2 + \nu^2 = 1$$

e quindi il modulo di λ sarà 1. Così è dimostrato il teorema del Colucci.

2. La precedente dimostrazione della proposizione di Brioschi e Colucci che ha il pregio di essere molto semplice è anche fondamentale per la trattazione che sto per svolgere.

Osservo che se λ è complesso, per la seconda delle (9) e per le (8), le

$$b_k \quad \text{e} \quad c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sono proporzionali ai coseni direttori di due rette r_1 ed r_2 fra loro ortogonali passanti per l'origine e tali che la sostituzione trasforma ognuna di esse in una retta del piano da esse individuato.

Prendendo la r_1 per asse x_1 e per asse x_2 la r_2, le equazioni della sostituzione vengono ad avere nulli tutti i coefficienti delle ultime $n-2$ equazioni e delle incognite x_1 ed x_2, il che risulta dal fatto che per

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$

deve essere

$$x_3' = x_4' = \ldots = x_n' = 0$$

e per

$$x_1 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$$

deve essere ancora

$$x_3' = x_4' = \ldots = x_n' = 0.$$

Per le condizioni di ortogonalità dell'intero determinante (2) deve essere ortogonale il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ma essendo

$$\Sigma_k a_{1k}^2 = 1, \quad \Sigma_k a_{2k}^2 = 1$$

ed inoltre

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$$

anche gli ultimi $n-2$ coefficienti delle prime equazioni sono nulli.

Consegue che le equazioni della sostituzione acquistano l'aspetto seguente

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad x_h' = \sum_3^n {}_k a_{hk}x_k \qquad (h = 3, 4 \ldots n).$$

Le ultime $n-2$ equazioni sono le equazioni di una sostituzione ortogonale nello spazio ad $n-2$ dimensioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e quindi per essa si possono ripetere le stesse considerazioni.

Si conclude che, scegliendo convenientemente gli assi, le equazioni di una sostituzione ortogonale acquistano la forma

$$(10) \qquad x'_{2j-1} = a_j \cdot x_{2j-1} + b_j \cdot x_{2j}, \quad x'_{2j} = c_j \cdot x_{2j-1} + d_j \cdot x_{2j} \qquad (j = 1, 2 \ldots p)$$

se $n = 2p$, o la forma delle (10) insieme con

$$x_n' = \pm x_n$$

se $n = 2p + 1$.

Per la condizione di ortogonalità esisterà un angolo θ_j soddisfacente alla condizione

$$0 \leq \theta_j \leq \pi$$

per cui

$$a_j = \cos\theta_j, \quad c_j = \operatorname{sen}\theta_j$$

e sarà

$$b_j = \mp \operatorname{sen}\beta_j, \quad d_j = \pm \cos\theta_j$$

i segni superiori valendo se

$$\begin{vmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{vmatrix} = 1$$

e gli inferiori se

$$\begin{vmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{vmatrix} = -1.$$

Nel secondo caso la sostituzione

$$x'_{2j-1} = a_j \cdot x_{2j-1} + b_j \cdot x_{2j}, \quad x'_{2j} = c_j \cdot x_{2j-1} + d_j \cdot x_{2j}$$

ha una retta unita perchè l'equazione di Brioschi ad essa relativa ha le radici reali, come si può facilmente verificare. Prendendo questa retta e la sua normale come assi le equazioni diventano

$$x'_{2j-1} = \pm x_{2j-1}, \quad x'_{2j} = \mp x_{2j}.$$

Fatto questo se occorre, si avranno nel sistema di equazioni alcune coppie della forma

$$x'_h = \cos\theta \cdot x_h - \operatorname{sen}\theta \cdot x_{h+1}, \quad x'_{h+1} = \operatorname{sen}\theta \cdot x_h + \cos\theta \cdot x_{h+1}$$

e le rimanenti della forma

$$x'_h = \pm x_h.$$

Quelle della forma

$$x'_h = - x_h$$

saranno in numero pari o dispari a seconda che ε è positivo o negativo.

Se $\varepsilon = 1$ le equazioni

$$x'_k = \pm x_k$$

si possono riunire in sistemi del tipo

$$x'_h = - x_h, \quad x'_k = - x_k$$

che si possono scrivere

$$x'_h = \cos\pi \cdot x_h - \operatorname{sen}\pi \cdot x_k, \quad x'_k = \operatorname{sen}\pi \cdot x_h + \cos\pi \cdot x_k$$

ed in coppie del tipo

$$x'_h = x_h, \quad x'_k = x_k$$

che si possono scrivere

$$x'_h = \cos 0 \cdot x_h - \operatorname{sen} 0 \cdot x_k, \quad x'_k = \operatorname{sen} 0 \cdot x_h + \cos 0 \cdot x_k$$

ed in ulteriore equazione del tipo

$$x'_n = x_n$$

se n è dispari.

Ordinando convenientemente le variabili, il sistema acquista per $\varepsilon = 1$ la forma

$$\text{(11)} \qquad \left| \begin{array}{l} x'_{2j-1} = \cos\theta_j \cdot x_{2j-1} - \operatorname{sen}\theta_j \cdot x_{2j} \\ x'_{2j} = \operatorname{sen}\theta_j \cdot x_{2j-1} + \cos\theta_j \cdot x_{2j} \end{array} \right.$$

più un' ulteriore equazione

$$x_n' = x_n$$

se n è dispari e che è inutile scrivere.

Questo risultato ci permette di concludere che la sostituzione vale il prodotto di p rotazioni di ampiezze θ_j intorno ai p spazi lineari A_j di $n-2$ dimensioni di equazioni $x_{2j-1} = 0$, $x_{2j} = 0$. Questi spazi A_j sono a due a due perpendicolari fra loro.

Se poi $\varepsilon = -1$ basta eseguire la simmetria $x_1' = -x_1$, per ricadere nel caso studiato.

3. Le considerazioni precedenti dimostrano il teorema A). Per dimostrare il teorema C) cominciamo ad eseguire se $\varepsilon = -1$, la simmetria che fa cambiare il segno ad x_1, e poi passiamo a considerare la sostituzione residua le cui equazioni sono quelle della prima ad eccezione dei coefficienti di x_1 che risultano uguali ai precedenti moltiplicati per ε. L'equazione di BRIOSCHI relativa a questa sostituzione è la (4). Ora è noto che le radici di questa equazione non cambiano cambiando assi di riferimento, quindi sono le stesse che si trovano quando la sostituzione ha la forma (11). Ma per questa le radici della equazione di BRIOSCHI sono evidentemente

$$e^{i\theta_j}, \quad e^{-i\theta_j}$$

e quindi le ampiezze delle rotazioni in cui abbiamo decomposto la sostituzione sono gli argomenti della (4).

4. Esaurito così lo scopo principale di questa nota, passo ad indicare il punto in cui è difettosa la dimostrazione del teorema di BRIOSCHI.

Si verifica facilmente che

$$f(x) \cdot f(-x) = x^n \begin{vmatrix} \frac{1}{x} - x & a_{12} - a_{21} & \dots & a_{1n} - a_{n1} \\ a_{21} - a_{12} & \frac{1}{x} - x & \dots & a_{2n} - a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - a_{1n} & a_{n2} - a_{2n} & \dots & \frac{1}{x} - x \end{vmatrix}$$

$$= x^n (y^p + A_1 y^{p-1} + \dots A_{p-1} y + A_p) \cdot \left(\frac{1}{x} - x\right)^{n-2p},$$

dove

$$y = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2,$$

e dove i coefficienti A_j sono somme di quadrati di numeri reali, e perciò ≥ 0, per le proprietà dei determinanti emisimmetrici [1]. L'errore sta nel non supporre che possa essere $A_p = 0$, $A_{p-1} = 0$ ecc.

[1] Vedi PASCAL, l. c., pagg. 89-95.